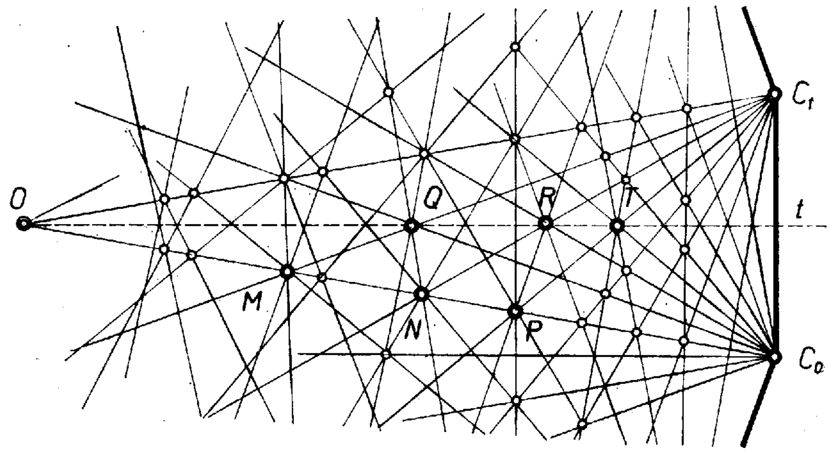
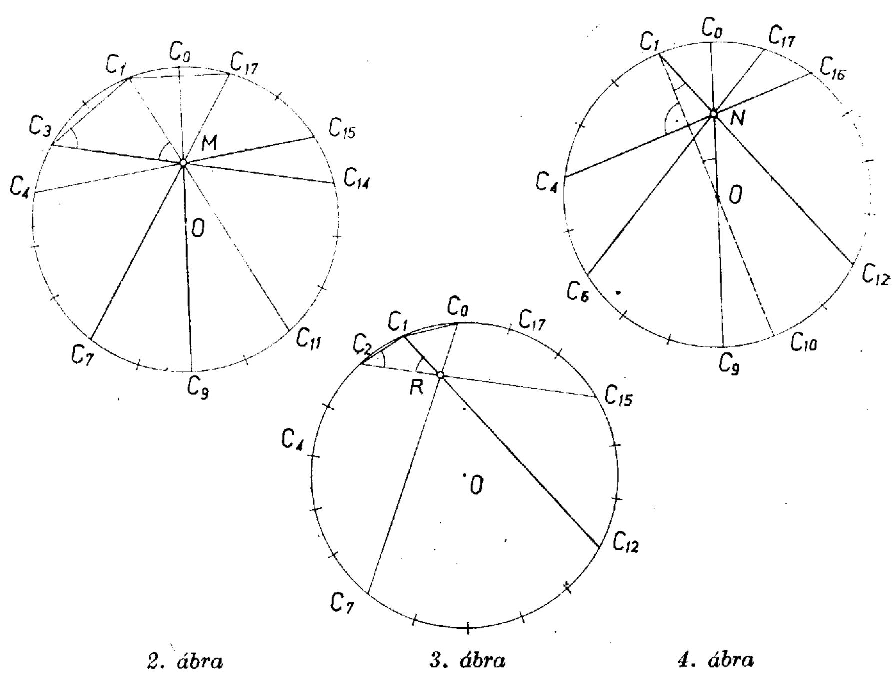
I. megoldás. A $C_0C_1C_2\dots C_{17}=S_{18}$ szabályos 18-szöget O középpontja körül $360^\circ:18=20^\circ$-kal elfordítva minden csúcs a rá következőbe megy át, minden átló egy átló helyére jut, és ugyanez áll a kívánt tulajdonságú metszéspontokra is. Ezért elég az $OC_0C_1=H$ egyenlő szárú háromszög belsejében és ennek C_0O szárán – végpontjait azonban a feladat szövege alapján kizárva – megkeresni azokat a pontokat, amelyeken legalább 4 átló megy át; az ilyen pontok számának 18-szorosa lesz a válasz a feladat kérdésére.



1. ábra

Gondos ábrát készítve a H-n áthaladó átlókról (1. ábra), úgy látjuk, hogy a követelmény szempontjából csak a C_0O sugár M, N, P pontjai és a háromszög t tengelyének Q, R, T pontjai jönnek szóba. Megmutatjuk, hogy az előbbi három ponton 5–5, az utóbbi hármon 4–4 átló megy át. (Az ábra nem kivonatként készült egy teljes ábrából, hanem számítások alapján.)

Az M-en átmenni látszó átlók közül a C_1C_{11} és $C_{17}C_7$, valamint a C_3C_{14} és $C_{15}C_4$ pár tagjai (2. ábra) mindenesetre C_0O-n metszik egymást, hiszen erre, mint S_{18} tengelyére nézve egymás tükörképei (C_i -nek tükörképe C_{18-i}, ha $0<$ $<i<18$), ezért elég belátnunk, hogy C_1C_{11} és $C_{17}C_7$-nek M_1 metszéspontja azonos C_1C_{11}-nek és C_3C_{14}-nek M_2 metszéspontjával. Valóban, $C_{17}C_1C_{11}\sphericalangle=C_1C_{17}C_7\sphericalangle=60^\circ$ mint az S_{18} köré írt k kör kerületének 1/3 részét kitevő íven nyugvó kerületi szögek, ezért $C_1C_{17}M_1$ egyenlő oldalú háromszög, így $C_1M_1=C_1C_{17}=C_1C_3$, másrészt ugyancsak kerületi szögekként $C_3C_1M_2\sphericalangle=C_3C_1C_{11}\sphericalangle=80^\circ$, $C_1C_3M_2\sphericalangle=50^\circ$, ezért $C_1M_2C_3\sphericalangle=50^\circ$, $C_1C_3M_2$ egyenlő szárú háromszög, $C_1M_2=C_1C_3=C_1M_1$. Eszerint M_2 azonos M_1-gyel, meglátásunk helyes, M a követelménynek megfelelő pont.



2. ábra **3. ábra** **4. ábra**

Hasonlóan R esetében (3. ábra) C_1C_{12}-nek és C_0C_7-nek a C_0C_1 oldalszakasz felező merőlegesén levő R_1 metszéspontja egyenlő oldalú háromszöget alkot C_0-lal és C_1-gyel, másrészt C_1C_{12}-nek és C_2C_{15}-nck R_2 metszéspontja (100° szárszögű) egyenlő szárú háromszöget alkot C_1-gyel és C_2 vel. Így $C_1R_2=C_1C_2=C_1C_0=C_1R_1$, tehát R_2 azonos R_1-gyel, és itt megy át a szimmetria folytán $C_{17}C_4$ is, R-ben tehát 4 átló metszi egymást.

Az N és P, valamint Q és T pontok esetében azt használjuk fel bizonyításunkban, hogy a rajtuk átmenni látszó átlók közül kettő–kettő S_{18}-ról ennek 6 oldalát metszi le, így a hozzá tartozó középponti szög $120°$, és mindegyik ilyen átló egy–egy $OC_i(=C_iC_{i\pm 9})$ sugár felező merőlegese, tehát rá vonatkozóan O és C_i egymás tükrös párja.

N-et a $C_0O=C_0C_9$ szimmetriatengely és a C_4C_{16} átló metszéspontjának tekintve (4. ábra) S_{18} szimmetriája alapján itt átmegy $C_{14}C_2$ is; másrészt O−nak C_4C_{16}-ra való tükörképe C_1, és ezt N-nel összekötve a C_1C_{12} átlót kapjuk, mert így $NC_1O\sphericalangle=NOC_1\sphericalangle=C_0OC_1\sphericalangle=20°=C_{12}C_1C_{10}\sphericalangle=C_{12}C_1O\sphericalangle$, hiszen C_0 és C_{12}, a C_1C_{10} átmérővel kettévágott síknak ugyanazon a felén vannak, tehát ezen van N is. Így pedig C_1C_{12}-nek C_0O-ra tükrös párja, $C_{17}C_6$ is átmegy N-en.

Ugyanígy, P-t OC_0 és C_5C_{17} közös pontjának tekintve, átmegy rajta C_2C_{15}, mert O tükörképe C_5C_{17}-re C_2, és $PC_2O\sphericalangle=POC_2\sphericalangle=C_0OC_2\sphericalangle=40°$; a C_2-n átmenő átmérő C_2C_{11}, és ettől $40°$-kal van elfordulva a $11+4=15$ indexű csúcsba menő C_2C_{15} egyenes. Továbbá átmegy P-n C_5C_{17}-nek és C_2C_{15}-nek C_0C_9-re való $C_{13}C_1$, ill. $C_{16}C_3$ tükörképe. Ezek szerint az N, P pontokon 5–5 átló megy át.

Q-t C_4C_{16} és a t tengely metszéspontjának tekintve, átmegy rajta C_4C_{16}-nak t-re való $C_{15}C_3$ tükörképe (C_i-nek t-re való tükörképe C_{19-i}, ha $i\geqq 2$) és t-nek C_4C_{16}-ra való tükörképe, ez pedig ugyancsak átlója S_{18}-nak, mert O képe C_1 és $QC_1O\sphericalangle=QOC_1\sphericalangle=10°=C_{11}C_1C_{10}\sphericalangle=C_{11}C_1O\sphericalangle$, tehát a kép a C_1C_{11} átló; végül átmegy Q-n C_1C_{11}-nek t-re való C_0C_8 tükörképe, tehát Q-n 4 átló megy át. Ugyanez hasonlóan bizonyítható T-re, mint t és a C_0C_6 átló metszéspontjára, s a rajta átmenő további 3 átló: C_1C_{13}, C_3C_{17} és $C_{16}C_2$.

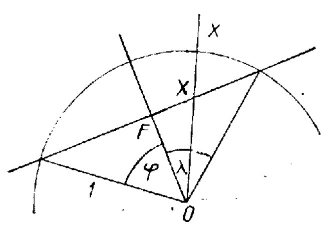
Mindezek szerint a követelményt S_{18}-han $18\cdot 6=108$ pont teljesíti.

Kiss Ipoly (Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium)
Reviczky János (Budapest, I. István Gimnázium)

II. megoldás. Az I. megoldásban megsejtett csomópontok valódi voltát számítással igazoljuk. Legyen az O közepű egységkör egy húrjának látószöge 2φ, a húr felezőpontja F, és egy, az O-ból kiinduló x félegyenesnek OF-fel bezárt szöge λ, a húron levő pontja X (5. ábra), ekkor

$$OX=\frac{OF}{\cos\lambda}=\frac{\cos\varphi}{\cos\lambda}\qquad(<1,\quad\text{ha}\quad\lambda<\varphi)$$

x-ként előbb OC_0-t, majd a t tengelyt veszszük, továbbá k-ként az egységkört, húrként pedig az $M,\ldots,T$-ben szóba jövő kétféle (C_0C_9 nél kisebb) átlóból egyet–egyet.



5. ábra

Az egyes csomópontok akkor és csak akkor léteznek, ha a táblázatban a ★ jelek helyére írhatunk egyenlőségi jelet. A két–két hányados (arány) egyenlősége helyett a közös nevezőre hozott alakok számlálójában álló szorzatokat fogjuk vizsgálni.

A φ érték, valamint OF-nek irányszöge könnyen megállapítható OC_i-nek OC_0-tól mért $i\cdot 20°$ irányszögéből, az utóbbi egyszersmind λ értéke, ha x-nek OC_0-t vesszük $x\equiv t$ esetén pedig ennél $10°$-kal kisebb.

Mármost a kérdéses szorzatok egyenlősége mindhárom esetpárban (a párok M és Q, továbbá N és R, végül P és T) a

$$\cos 60°\,\cos 2z=\frac{1}{2}\sin(90°-2z)=\sin(45°-z)=\cos(45°-z)=\cos(45°+z)\,\cos(45°-z)$$

azonosságból következik, $2z$-t rendre $70°$-nak, $50°$-nak, ill. $10°$-nak véve. Ezek szerint az x helyére mindenütt beírható az egyenlőség, a bizonyítást befejeztük.

		φ	λ	A kérdéses OX kifejezés	Helyette vizsgálható
M	$C_{15}C_4$ $C_{17}C_7$	$70°$ $80°$	$10°$ $60°$	$\frac{\cos 70°}{\cos 10°} \star \frac{\cos 80°}{\cos 60°}$	$\cos 70° \cos 60° * \cos 80° \cos 10°$
N	$C_{16}C_4$ $C_{17}C_6$	$60°$ $70°$	$20°$ $50°$	$\frac{\cos 60°}{\cos 20°} \star \frac{\cos 70°}{\cos 50°}$	$\cos 60° \cos 50° * \cos 70° \cos 20°$
P	$C_{16}C_3$ $C_{17}C_5$	$50°$ $60°$	$10°$ $40°$	$\frac{\cos 50°}{\cos 10°} \star \frac{\cos 60°}{\cos 40°}$	$\cos 50° \cos 40° * \cos 60° \cos 10°$
Q	$C_{16}C_4$ C_0C_8	$60°$ $80°$	$10°$ $70°$	mint M-nél	
R	$C_{17}C_4$ C_0C_7	$50°$ $70°$	$20°$ $60°$	mint N-nél	
T	$C_{17}C_3$ C_0C_6	$40°$ $60°$	$10°$ $50°$	mint P-nél	