I. Megoldás. A harmadik gyökjel alatti kifejezés $(10-x-y)^2+2^2$ alakban írható, az első két tag eleve két négyzet összege. A vizsgált összeg három tagja tehát rendre a derékszögű koordinátarendszer

$$u\,(x,\ 1),\quad v\,(y,\ 3),\quad w\,(10-x-y,\ 2)$$

koordinátájú vektorainak a hossza. A vizsgált $K(x,\,y)$ függvény értéke tehát

$$K(x,\ y)=|u|+|v|+|w|, \tag{1}$$

ahol az abszolút érték jel most az egyes vektorok hosszát jelöli. E három vektor

$$a=u+v+w \tag{2}$$

$a(10;\,6)$ összegének koordinátái nem függnek az x, y változóktól. Megmutatjuk, hogy $K(x,\,y)$ minimuma egyenlő az a vektor hosszával, $\sqrt{136}$-tal.

Tekintsük a $z=u+v$ összeg szokásos előállítását. Ha u és v állása különböző, az egymáshoz csatlakozó u és v vektorok egy háromszöget határoznak meg, melyben a z vektornak megfelelő oldal hossza kisebb az u és v vektoroknak megfelelő oldal hosszának összegénél:

$$|z|=|u+v|<|u|+|v|.$$

Ha u és v állása megegyezik, akkor

$$|z|=|u|+|v|\quad\text{vagy}\quad|z|=\big||u|-|v|\big|$$

aszerint, hogy u és v iránya megegyezik-e vagy ellentétes. Ezek szerint mindig helyes az

$$|u+v|\le|u|+|v| \tag{3}$$

egyenlőtlenség, és ebben az egyenlőség akkor és csakis akkor érvényes, ha u és v állása és iránya megegyezik.

Alkalmazzuk (3)-at a z és w vektorokra:

$$|z+w|\le|z|+|w|,$$

azaz

$$|u+v+w|\le|u+v|+|w|.$$

(3) alapján ebből az

$$|u+v+w|\le|u+v|+|w|\le|u|+|v|+|w|$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az első egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha z és w állása és iránya megegyezik, a második pedig, ha u és v állása és iránya megegyezik. Az utóbbi esetben z állása és iránya megegyezik u és v állásával és irányával, tehát mindkét helyen akkor és csakis akkor teljesül az egyenlőség, ha az u, v, w vektorok állása és iránya megegyezik. Ezek szerint tetszőleges u, v, w vektorra érvényes az

$$|u+v+w|\le|u|+|w|+|w| \tag{4}$$

egyenlőtlenség, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha u, v, w állása és iránya megegyezik.

Összegezve a kapott eredményeket, (1), (2) és (4) szerint

$$K(x,\ y)=|u|+|v|+|w|\ge|u+v+w|=|a|=\sqrt{136}.$$

Itt az egyenlőség csak akkor érvényes, ha u, v, w állása és iránya megegyezik a állásával és irányával, azaz

$$u=\lambda a,\quad v=\mu a,\quad w=\nu a,$$

ahol λ, μ, ν alkalmas pozitív számok. A második koordináták összehasonlítása alapján ebből $\lambda=1/6$, $\mu=1/2$, $\nu=1/3$ következik, így az első koordináták alapján

$$x=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};\quad y=\frac{10}{2}=5. \tag{5}$$

Tehát a $K(x,\,y)$ függvény minimuma $\sqrt{136}$, melyet az (5) alatti értékek mellett (és csakis ezek mellett) vesz fel.

II. megoldás. Rögzítsük először y értékét, legyen mondjuk $y=y_0$, és vizsgáljuk meg, hol veszi fel az

$$f(x)=K(x,\ y_0)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y_0^2+9}+\sqrt{x^2+y_0^2-20x-20y+2xy_0+104}$$

egyváltozós függvény a minimumát. E függvény mindenütt értelmezve van, hiszen a harmadik gyökjel alatti mennyiség is határozottan pozitív

$$x^2+y_0^2-20x-20y_0+2xy_0+104=(x-10+y_0)^2+4.$$

Ha e függvény deriváltja,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-10+y_0}{\sqrt{x^2+y_0^2-20x-20y_0+2xy_0+104}}$$

0-val egyenlő, akkor

$$x^2(x^2+y_0^2-20x-20y_0+2xy_0+104) = (x^2+1)(x-10+y_0)^2. \tag{6}$$

Egyenletünk mindkét oldalából $x^2(x-10+y_0)^2$-t levonva a

$$4x^2 = (x-10+y_0)^2$$

egyenletet kapjuk, melynek gyökei vagy a

$$2x = x-10+y_0 \tag{7a}$$

vagy a

$$-2x = x-10+y_0 \tag{7b}$$

egyenlet gyökei, azaz $x = y_0 - 10$ vagy $x = (10-y_0)/3$.

Ha $y_0 = 10$, akkor e két gyök egyenlő. A (7a)-ból kapott gyök mellett $f'(x)$ nem lehet 0, hiszen (7a) szerint $f'(x)$ eredeti alakjában a két tört számlálójának megegyezik az előjele (és e számlálók 0-tól különbözők), a nevezők pedig pozitívak. Tehát $f'(x)$ csak a (7b) egyenlet

$$x_0 = \frac{10-y_0}{3} \tag{8}$$

gyöke mellett lehet 0.

Ha $y_0 = 10$, akkor $f'(x)$ eredeti alakjában mindkét tört számlálója 0, tehát $f'(x_0) = 0$. Ha $y_0 \neq 10$, akkor $x_0 \neq 0$, és mivel (8) gyöke (6)-nak, azért

$$\frac{x_0^2+y_0^2-20x_0-20y_0+2x_0y_0+104}{x_0^2+1} = \left(\frac{x_0-10+y_0}{x_0}\right)^2 = 4. \tag{9}$$

Tehát $f'(x)$ eredeti alakjában x helyére x_0-t helyettesítve, a második tört nevezője az első tört nevezőjének 2-szerese, viszont (7b) szerint a második tört számlálója az első számlálójának (-2)-szerese, így $f'(x_0)$ értéke 0. Az $f(x)$ függvény második deriváltja,

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} + \frac{4}{(x^2+y_0^2-20x-20y_0+2xy_0+104)^{3/2}},$$

mindenütt pozitív, tehát $f(x)$-nek $x = x_0$ mellett minimuma van. E minimális érték kiszámítását megkönnyíti a (9) összefüggés, eszerint

$$f(x_0) = 3\sqrt{x_0^2+1} + \sqrt{y_0^2+9} = \sqrt{(10-y_0)^2+9} + \sqrt{y_0^2+9}.$$

Átfogalmazva eredményünket, az eredeti $K(x,\ y)$ függvényre kapjuk, hogy

$$K(x,\ y) \geq \sqrt{(10-y)^2+9} + \sqrt{y^2+9},$$

és az egyenlőség akkor érvényes, ha $x = (10-y)/3$. A $K(x,\ y)$ függvény minimuma tehát egyenlő a

$$g(y) = \sqrt{(10-y)^2+9} + \sqrt{y^2+9}$$

függvény minimumával. E függvény

$$g'(y) = \frac{y-10}{\sqrt{(10-y)^2+9}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9}}$$

deriváltja akkor egyenlő 0-val, ha

$$(10-y)^2(y^2+9) = y^2\left[(10-y)^2+9\right],$$

azaz

$$9\,(10-y)^2 = 9y^2.$$

Ebből ismét csak a

$$10 - y = y$$

egyenlet gyöke jöhet szóba, különben a $g'(y)$-ban szereplő két tört egyenlő előjelű volna. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $y=5$ mellett $g'(y)$ valóban 0, a második derivált

$$g''(y)=\frac{9}{\left[(10-y)^2+9\right]^{3/2}}+\frac{9}{\left(y^2+9\right)^{3/2}}$$

ismét mindenütt pozitív, tehát

$$K(x,\ y)\geq g(y)\geq g(5)=2\sqrt{34}.$$

A $K(x, y)$ függvény minimuma tehát $2\sqrt{34}$, és ezt az

$$y=5, \quad x=5/3$$

értékpár mellett veszi fel.