I. megoldás. Ebben a feladatban számon mindig természetes számot értünk, és betűvel is mindig ilyet jelölünk.

Van 8-asra végződő köbszám: a $2^3 = 8$; és minden a 2-essel végződő szám köbe 8-assal végződik, mert ha egy x alap egyeseinek száma e, akkor x^3-ben annyi egyes van, mint e^3-ben:

$$x^3 = (10t + e)^3 = \left(100t^3 + 30t^2e + 3te^2\right) \cdot 10 + e^3.$$

Más végződés nem is felelhet meg esetünkben, mert, ha $e \neq 2$, akkor e^3 végén nem 8-as áll.

Hasonlóan, ha két szám n-jegyű végződése ($n \geqq 2$) ugyanaz az A szám ($A < 10^n$), vagyis $N_1 = B_1 \cdot 10^n + A$ és $N_2 = B_2 \cdot 10^n + A$, akkor köbük n jegyű végződése is egyezik, mert különbségük végén legalább n db 0 áll:

$$N_1^3 - N_2^3 = (N_1 - N_2)(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2) = (B_1 - B_2)(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2) \cdot 10^n.$$

Legyen A_n olyan (legföljebb) n jegyű alap ($n \geqq 1$), melynek köbében az utolsó n jegy 8-as, és az ezeket közvetlenül megelőző számjegy (a 10^n értékű helyen) k; ekkor az előzők alapján várható, hogy találunk az alap elé a 10^n értékű helyre olyan a számjegyet, hogy az $A_{n+1} = a \cdot 10^n + A_n$, legföljebb $n + 1$ jegyű szám köbének végén (legalább) $n + 1$ db 8-as álljon.

$$A_{n+1}^3 = a^3 \cdot 10^{3n} + 3a^2A_n \cdot 10^{2n} + 3aA_n^2 \cdot 10^n + A_n^3,$$

és itt $n \geqq 1$ miatt $10^{2n} > 10^n$, így a 10^n értékű helyre csak az utolsó két tag adhat 0-tól különböző jegyet. Az utolsó tag k-t adja, az előtte álló tag pedig $3aA_n^2$ utolsó jegyét. Mivel A_n utolsó jegye 2, azért A_n^2-é 4, így a mondott számjegy $12a$-nak utolsó jegye, ami ugyanaz, mint $2a$ utolsó jegye. Eszerint követelésünk, az esetleges tízes átvitel figyelembevételével így alakul:

$$2a + k = 8 \text{ vagy } 18$$

(hiszen $a + a + k \leqq 27$), eszerint megfelel

$$a = 4 - \frac{k}{2} \quad \text{vagy} \quad 9 - \frac{k}{2}, \tag{1}$$

föltéve természetesen, hogy k páros számjegy.

Mármost $A_1 = 2$ köbében $k = 0$, így $a = 4$ vagy 9, tehát A_2-ként 42 és 92 adódik. Köbük háromjegyű végződése 088, ill. 688, azaz $k = 0$,ill. 6, az elsőhöz $a = 4$ és 9 adódik, a másodikhoz $a = 1$ és 6.

Az így kapott $A_3 = 442$ és 942, valamint 192 és 692 köbének 4 jegyű végződése rendre 0888, 6888, 7888, 3888, az utóbbi kettőhöz nem tartozik a-érték, az előbbi kettőből pedig ezek jönnek szóba:

$$A_4 = 4442, \qquad 9442, \qquad 1942, \qquad 6492.$$

Köbük jobbról számított 5-ik számjegye rendre 1, 7, 8, 4 (utána pedig 4 db 8-as), így az első kettőt el kell hagynunk, és

$$A_5 = 01942, \qquad 51\,942, \qquad 26\,942, \qquad 76\,942,$$

és hasonlóan az utolsó kettőből, $k = 2$, ill. 8 alapján az

$$A_6 = 326\,942, \qquad 826\,942, \qquad 076\,942, \qquad 576\,942$$

számok köbe 6 db 8-asra végződik (és a harmadik szám lényegében csak ötjegyű). Eszerint a feladat kérdésére a válasz igenlő.

A köbre emeléseket ismételt szorzással végeztük, de mindig csak annyi számjegyre a végétől számítva, amennyire éppen szükség volt, pl. $A_3 = 192$ esetében

$$\begin{array}{r} \underline{192} \times 192 \\ 384 \\ ...728 \\ \underline{...92\quad} \\ ...6864 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \underline{6864} \times 192 \\ 3728 \\ ...776 \\ \underline{...64\quad} \\ ...7888 \end{array}$$

Mivel lépésről lépésre kaptuk a következő (azaz megelőző) számjegyet, eljárásunk nem bizonyítja, hogy bármely n-hez létezik n db 8-asra végződő köbszám. Azt azonban látjuk, hogy $n = 6$-hoz a talált A_6-kon kívül más (legföljebb hatjegyű) szám nem felel meg.

Kertész András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Nem nehéz kiegészíteni a fentieket az utoljára említett bizonyítássá, ezért vázoljuk $n = 3$ esetére. Vegyük észre, hogy a talált A_3 értékeket növekvően rendezve számtani sorozatot kapunk $d = 250$-es differenciával: 192, 442, 692, 942 (aminek ez a magyarázata: az A_2 értékek különbsége (1) miatt 50, továbbá 92-höz 6-tal nagyobb k

adódott, mint 42-höz, ezért a 92 elé (1) miatt $6/2=3$-mal kisebb százas jegyek kerültek). A hozzájuk talált k értékekre is ugyanaz áll $d=3$ mellett: 7, 0 (azaz 10), 3, 6. Valóban,

$$(192+250c)^3 = 7\,077\,888 + 27\,648\cdot 10^3 c + 36\cdot 10^6 c^2 + 15\,625\cdot 10^3 c^3 =$$
$$= (707+2764c+3600c^2+1562c^3)\cdot 10^4 + 5c(1+c^2)\cdot 10^3 + (7+3c)10^3 + 888,$$

és itt $c(1+c^2)$ páros, a második tag is többszöröse 10^4-nek, tehát a 10^3 értékű helyen $7+3c$ utolsó jegye adódik k-ként, $c=0$, 1, 2, 3 mellett. Tehát páratlan c esetén k páros, viszont páros c mellett páratlan, így esett ki a további keresésből az egymástól $2\cdot 250=500$-zal különböző 192 és 692 és megmaradt az ugyancsak 500-zal különböző 442 és 942.

Teljes indukcióval ennek mintájára bizonyítható, hogy minden négy db A_n-ből kettő kiesik, a maradó kettőben a nagyobbikhoz tartozó k a másiknál 6-tal nagyobb, és belőlük ismét négy db A_{n+1} adódik, $25\cdot 10^{n-1}$ differenciával. Felhasználjuk azt is, hogy $n \geqq 4$ esetén A_n páros, de nem osztható 4-gyel.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy bármely n-hez van olyan legföljebb n jegyű E_n szám, hogy E_n^2 végén n db 1-es áll. Ebből már következik, hogy van olyan N_n is, hogy N_n^3 végén n db 8-as áll, hiszen $N_n=2E_n$ köbének, $8E_n^3$-nek végén legalább annyi 8-as áll, mint ahány 1-esre (E_n^2 végződik (akkor több 1-gyel, ha a köb 1-esei előtt 6 áll, vagy 36, vagy 13; megfordítva viszont nem mindig teljesül, hogy n db 8-asra végződő köbszám 8-adrésze n db 1-esre végződik, hiszen pl. az I. megoldásbeli $A_3=192$ és 692-nek a fele páros, vagy $A_5/2=971$-nek a köbében a várható 5-nél kevesebb az 1-esek száma $971^3=\ldots 611$).

Nyilvánvalóan $E_1=1$, és csak 1-esre végződő E_n-ekről lehet szó. Legyen az I. megoldáshoz hasonlóan E_n^3-nek a 10^n értékű helyen álló jegye k^*, és keressük $E_{n+1}=a^*\cdot 10^n+E_n$-ben a^*-ot úgy, hogy E_n köbében a 10^n értékű helyen is 1-es álljon:

$$E_{n+1}^3 = a^{*3}\cdot 10^{3n} + 3a^{*2}\cdot E_n\cdot 10^{2n} + 3a^*E_n^2\cdot 10^n + E_n^3,$$

ennek a 10^n értékű helyen álló számjegyére pedig

$$3a^*+k^* = 1 \text{ vagy } 11 \text{ vagy } 21 \text{ vagy } 31$$

mindenesetre teljesül (hiszen E_n^2 utolsó jegye 1-es) éspedig rendre az

$$a^*=\frac{1-k^*}{3},\quad 3-\frac{k^*-2}{3},\quad 7-\frac{k^*}{3},\quad 10-\frac{k^*-1}{3} \tag{2}$$

értékkel aszerint, hogy $k^*=1$, ill. $k^*\neq 1$ esetén ezt 3-mal osztva a maradék 2, 0, ill. 1.

Ezzel beláttuk, hogy akárhány 1-esünk volt egy köbszám végén, kaphatunk hozzá olyan köböt, melynek végén (legalább) 1-gyel több az 1-esek száma, ennélfogva a 8-asokra is ugyanez áll.

$$\begin{aligned}
&E_1^3 = 1 = 01\text{-ben } k^*=0 \text{ és (2) szerint } a^*=7;\\
&E_2^3 = 71^3 = \ldots 911\text{-ben } k^*=9,\ a^*=4;\\
&E_3^3 = 471^3 = \ldots 7111\text{-ben } k^*=7,\ a^*=8,\\
&E_4^3 = 8471^3 = \ldots 71\,111\text{-ből } a^*=8,\\
&E_5^3 = 88\,471^3 = \ldots 511\,111\text{-ől } a^*=2,
\end{aligned}$$

és így $2E_6=2\cdot 288\,471=576\,942$ köbének végén a 8-asok száma legalább 6.

Ez az eljárás kevesebb számolással jut eredményhez, mint az I. megoldásbeli, mert minden lépésben csak egy E_n számot ad. Pl. E_2-ből $2E_2=142$ útján csak a fenti $A_2=42$ érték adódik ki, a később (A_4 keresésében) kieső $A_2=92$ nem. Ugyanígy az $A_2=42$-ből adódott, de az A_5 keresésekor kiesett $A_3=442$ sem adódik ki itt, s i. t.

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)