

**1. feladat.** Egy egész együtthatós másodfokú egyenletben az ismeretlent tartalmazó két tag együtthatóinak összege páros, az ismeretlent nem tartalmazó tag pedig páratlan szám. Bizonyítandó, hogy az egyenletnek racionális gyöke csak olyan tört lehet, melynek legegyszerűbb alakjában a nevező páros szám.

**Megoldás.** Legyen a szóban forgó egyenlet

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A feladat állítása így fogalmazható: egy olyan  $p/q$  tört ( $p$  és  $q$  egész), amelynek  $q$  nevezője páratlan, nem lehet gyöke az egyenletnek.

Helyettesítsünk a bal oldalba  $p/q$ -t és hozzunk közös nevezőre. Így a

$$[p(ap + bq) + cq^2]/q^2$$

törtet kapjuk. Ha  $q$  páratlan, akkor a számláló második tagja páratlan, az első viszont páros, mert vagy  $p$  páros, vagy ha  $p$  páratlan, akkor  $ap + bq = (a + b)p + b(q - p)$ , és itt  $a + b$  és  $q - p$  páros, tehát a mondott tag értéke is az. Így a számláló páratlan, tehát nem lehet 0, és vele együtt a tört sem. Ezt akartuk bizonyítani.

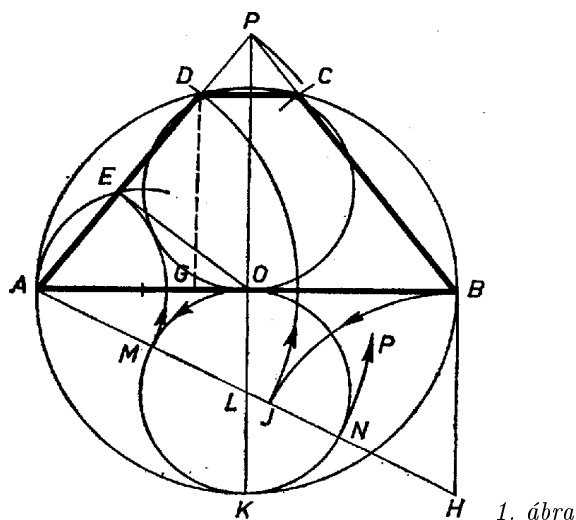
*Megjegyzések.* 1. Az utolsó átalakításból az is látható, hogy ha  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört, és gyöke az egyenletnek, és  $q$  páros, akkor  $b$ -nek (s így  $a$ -nak is) párosnak kell lennie; tehát ha egy egész együtthatós másodfokú egyenlet együtthatói páratlanok, akkor nincs racionális gyöke.<sup>1</sup>

2. A  $4x^2 - 16x + 7 = 0$  egyenlet pl., amelynek gyökei  $1/2$  és  $7/2$ , mutatja, hogy a feladat feltételei mellett lehet racionális gyöke az egyenletnek.

3. A feladat állítása a következőképpen általánosítható: Ha egy  $n$ -ed fokú egész együtthatós egyenletben ( $n$  természetes szám) az ismeretlent tartalmazó tagok együtthatóinak összege páros, az ismeretlent nem tartalmazó tag pedig páratlan, akkor az egyenlet racionális gyöke csak olyan tört lehet, amelynek legegyszerűbb alakjában a nevező páros. A tétel a fenti megoldáshoz hasonlóan bizonyítható.

**2. feladat.** Szerkesszünk adott körbe olyan trapézt, melybe kör írható, és amelynek egyik oldala a körnek átmérője.

**Megoldás.** A megszerkesztendő  $ABCD$  trapéz egyenlő szárú, mert húrtrapéz, és szárai a hosszabb párhuzamos oldal szemben levő végpontjából mindenesetre hegyes szögben látszanak, így kisebbek a kör átmérőjénél. A trapézban a kör átmérőjével egyenlő  $AB$  oldala tehát a hosszabb párhuzamos oldal.



1. ábra

A szár hosszát számítással határozzuk meg. Legyen  $AB = 1$ ,  $AD = BC = x$ ,  $D$  vetülete az  $AB$  oldalon  $G$  (1. ábra). Az  $ABD$  háromszög Thalész tétele alapján derékszögű, így az ismert mértani középábrányos tétel szerint  $AD^2 = AB \cdot AG$ , azaz  $AG = x^2$ . Ezért  $DC = AB - 2AG = 1 - 2x^2$ . Mivel továbbá a trapézba kör írható, azért  $AD + BC = AB + DC$ , vagyis

$$(1) \quad 2x = 1 + (1 - 2x^2),$$

aminek pozitív gyöke

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

<sup>1</sup> Ennek bizonyítása volt az 1961. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 1. feladata, lásd a megoldást K.M.L. 24. (1962) 1-2. o.

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Az adott kör  $O$  középpontján át tetszés szerint felvett  $AB$  átmérő  $B$  végpontjában meghúzzuk az érintőt, felmérjük rá a  $BH = BO = 1/2$  szakaszt, ekkor  $AH = \sqrt{5}/2$ . Az  $AH$  szakaszt metsszük a  $H$  körül  $HB$  sugárral írt körrel  $J$ -ben, ekkor  $AJ = x$ . Végül az  $A$  és  $B$  körül  $AJ$  sugárral írt körívvel az adott körből kimetszük a  $D$ , illetőleg  $C$  csücsöt.

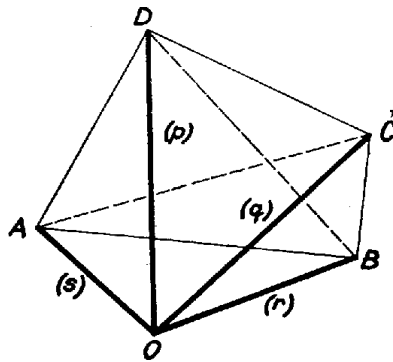
Így a csücsök a körön vannak, másrészt teljesül (1) is, ezért a trapézba érintő kör írható, tehát megfelel a követelményeknek.

*Megjegyzés.* A fenti szerkesztést felére kicsinyítve végezhetjük el, a kör  $AB$ -re merőleges sugarai egyike,  $OK$  fölé kört írva. Ennek középpontját  $L$ -lel,  $AL$ -lel való metszéspontjait  $M$ -mel és  $N$ -nel jelölve ( $AM < AN$ )  $AM = AJ/2$ , ennek alapján az  $AO$  átmérőjű Thalész körből kimetszhetjük az  $AD$  oldal  $E$  felezőpontját.

Az  $N$  metszéspont alapján viszont a szárak  $P$  metszéspontját jelölhetjük ki a trapéz szimmetriatengelyén. Ugyanis  $OE$ , mint az  $OAD$  egyenlő szárú háromszög magassága, merőleges  $AP$ -re, így a  $PAO$  derékszögű háromszögből

$$AP = \frac{AO^2}{AE} = \frac{1}{4 \cdot AE} = \frac{1}{4 \cdot AM} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = AL + LN = AN.$$

**3. feladat.** Négy adott szakasz kezdőpontja közös. A szakaszok milyen (egy síkban való) elhelyezése esetén lesz a végpontjaikkal, mint csücsökkel meghatározott négyszög területe a legnagyobb?



2. ábra

**I. megoldás.** Legyen az adott szakaszok közös kezdőpontja  $O$ , végpontjaik egy bizonyos helyzetben  $A, B, C, D$ , a betűzést úgy választva, hogy  $ABCD$  ne hurkolt négyszöget adjon. Ennek területe, mint ismeretes (2. ábra)

$$(2) \quad t = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi,$$

ahol  $\varphi$  az  $AC$  és  $BD$  átlók által bezárt szög.

A szakaszok kölcsönös helyzetét változtatva mindig fennáll

$$AC \leq AO + OC, \quad BD \leq BO + OD, \quad (0 \leq \sin \varphi \leq 1,$$

tehát

$$t \leq \frac{1}{2}(AO + OC)(BO + OD).$$

Itt az egyenlőség teljesül, (2) tényezői (egymástól függetlenül) elérik legnagyobb értéküket, ha az  $OA$  és  $OC$ , valamint  $OB$  és  $OD$  szakaszok egymás meghosszabbításába esnek – más szóval, ha  $O$  az  $AC$  és  $BD$  átlók metszéspontjává válik –, és ha még  $\varphi = 90^\circ$ , vagyis az átlók merőlegesek egymásra. Ekkor  $t$  legnagyobb értéke csak a szakaszok hosszától és azok két párba rendezésétől függ.

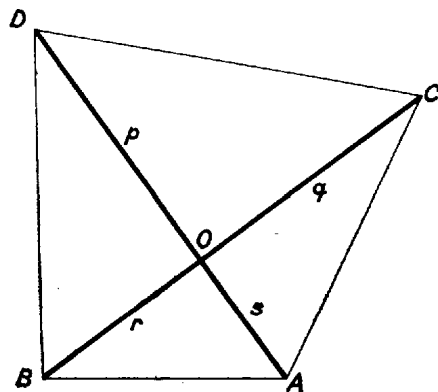
A 4 szakasz 2 párba állítása háromféleképpen lehetséges, mert az elsőnek kiválasztott szakasz meghosszabbításába a további 3 bármelyikét állíthatjuk, és ezután mindig a maradék 2 szakasz alkotja a másik párt. Legyen a 4 szakasz hossza  $p, q, r, s$  úgy, hogy  $p \geq q \geq r \geq s (> 0)$ , így a kétszeres terület legnagyobb értéke a következő 3 szorzat valamelyike:

$$2t_1 = (p + q)(r + s), \quad 2t_2 = (p + r)(q + s), \quad 2t_3 = (p + s)(q + r).$$

A harmadikból az első, majd a másodikat kivonva a különbség így alakítható:

$$2(t_3 - t_1) = (p - r)(q - s), \quad 2(t_3 - t_2) = (p - q)(r - s).$$

Ezek egyike sem negatív, tehát  $t_3 \geq t_1$ ,  $t_3 \geq t_2$ , így  $p$ -nek  $s$ -sel – vagyis a leghosszabb szakasznak a legrövidebbel – egy átlóba állítása esetén kapunk legnagyobb területű négyszöget (3. ábra).



3. ábra

**II. megoldás.** A fentebbi jelölésekkel az  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  és  $ODA$  háromszög területe külön-külön akkor a legnagyobb, ha  $O$ -ból kiinduló két oldaluk merőleges egymásra. Ez a 4 feltétel egyidejűen teljesíthető úgy, hogy a négy háromszög  $O$ -nál levő derékszögeivel kitöltjük az  $O$  pont körüli  $360^\circ$ -os szögtartományt, és ekkor az  $ABCD$  négyszög területe is a legnagyobb, egyenlő a négy derékszögű háromszög területének összegével. Ebben az elhelyezésben 2–2 szakasz egymás meghosszabbításába esik, és az  $ABCD$  négyszög egy-egy átlóját alkotja.

A szakaszok fenti 3 párosításából akkor kapunk legnagyobb területet, ha az egyik átló a legkisebb és a legnagyobb szakasz összege. Ismeretes ugyanis, hogy két egyenlő kerületű téglalap közül annak nagyobb a területe, amelyikben az oldalak különbsége (abszolút értékben) kisebb. Más szóval, ha két (két-tényezős) szorzatban a tényezők összege ugyanakkora, akkor az a szorzat nagyobb, amelyikben a tényezők kevesebbel térnek el egymástól. Esetünkben a két tényező a 4 adott szakaszból alkotott két páros összeg, és ezek eltérése akkor a legkisebb, ha a legkisebb szakaszt a legnagyobbikkal állítjuk párba.

Scharnitzky Viktor