Kezdők versenye (az általános verseny és a speciális matematikai osztályok versenye)

Az általános és a matematikai osztályok első feladata csak az egyenletrendszer állandóiban különbözött, ezért együtt fogjuk ezeket tárgyalni.

1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{a},\qquad \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{b},\qquad \frac{zu}{z+u}-\frac{1}{c}=0,$$

$$(*)\qquad \frac{xyzu}{x+y+z+u}=\frac{1}{d},$$

ahol $a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=1$ *(általános verseny),*
ill. $a=1,\ b=3,\ c=-2,\ d=1$ *(matematikai osztályok versenye).*

Megoldás. Az utolsó egyenletnek csak olyan megoldása lehet, amelyikben egyik ismeretlen sem 0, így létezik a reciprokuk. A harmadik egyenletben az állandót a jobb oldalra víve, majd az első három egyenlet reciprokát véve, elsőfokú egyenletrendszert kapunk az ismeretlenek reciprokaira:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b,\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{u}=c.$$

Innen bármely három ismeretlen kifejezhető a negyedikkel és a negyedik egyenletbe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk. Célszerű lesz azonban először annak is a reciprokát venni és x-et és y-t, valamint z-t és u-t együtt tartva az első és a harmadik egyenlet felhasználásával átalakítani az egyenletet:

$$\frac{x+y+z+u}{xyzu}=\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{1}{zu}+\frac{z+u}{zu}\cdot\frac{1}{xy}=a\,\frac{1}{zu}+c\,\frac{1}{xy}=d.$$

Most kifejezzük $\frac{1}{y}$-nal a többi ismeretlen reciprokát és az utolsó egyenletbe helyettesítjük:

$$\frac{1}{x}=a-\frac{1}{y},\quad \frac{1}{z}=b-\frac{1}{y},\quad \frac{1}{u}=c-\frac{1}{z}=c-b+\frac{1}{y};$$

$$a\left(b-\frac{1}{y}\right)\left(c-b+\frac{1}{y}\right)+c\left(a-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}=d.$$

Ebből rendezéssel a következő egyenletet kapjuk $\frac{1}{y}$-ra:

$$(1)\qquad (a+c)\left(\frac{1}{y}\right)^2-2ab\left(\frac{1}{y}\right)+ab^2-abc+d=0.$$

Az első konstans értékek mellett elsőfokú egyenletet kapunk:

$$-\frac{4}{y}+7=0,\qquad \frac{1}{y}=\frac{7}{4},\qquad \text{így}$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{3}{4},\qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{4},\qquad \frac{1}{u}=-\frac{5}{4}$$

és az egyenletrendszer megoldása

$$x=-\frac{4}{3},\qquad y=\frac{4}{7},\qquad z=4,\qquad u=-\frac{4}{5}.$$

Ez valóban megoldás, mert $x+y$, $y+z$, $z+u$ és $x+y+z+u$ egyike sem 0, és így minden végzett átalakítás megfordítható.

A matematikai osztályok feladata esetében (1) így alakul:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2+6\cdot\frac{1}{y}-16=0.$$

Mindkét oldalhoz 25-öt adva

$$\left(\frac{1}{y}+3\right)^2=25,$$

amiből a következő két lehetőség adódik: $\dfrac{1}{y}=2$, és $\dfrac{1}{y}=-8$. Ennek megfelelően a többi ismeretlen reciprokára is két értéket kapunk:

$$\frac{1}{y}=2 \text{ esetén} \qquad \frac{1}{x}=-1, \quad \frac{1}{z}=1 \quad \text{és} \quad \frac{1}{u}=-3;$$

$$\frac{1}{y}=8 \text{ esetén} \qquad \frac{1}{x}=9, \quad \frac{1}{z}=11 \quad \text{és} \quad \frac{1}{u}=-13.$$

Innen a következő két gyökrendszer adódik:

$$x=-1, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad z=1 \qquad \text{és} \qquad u=-\frac{1}{3},$$

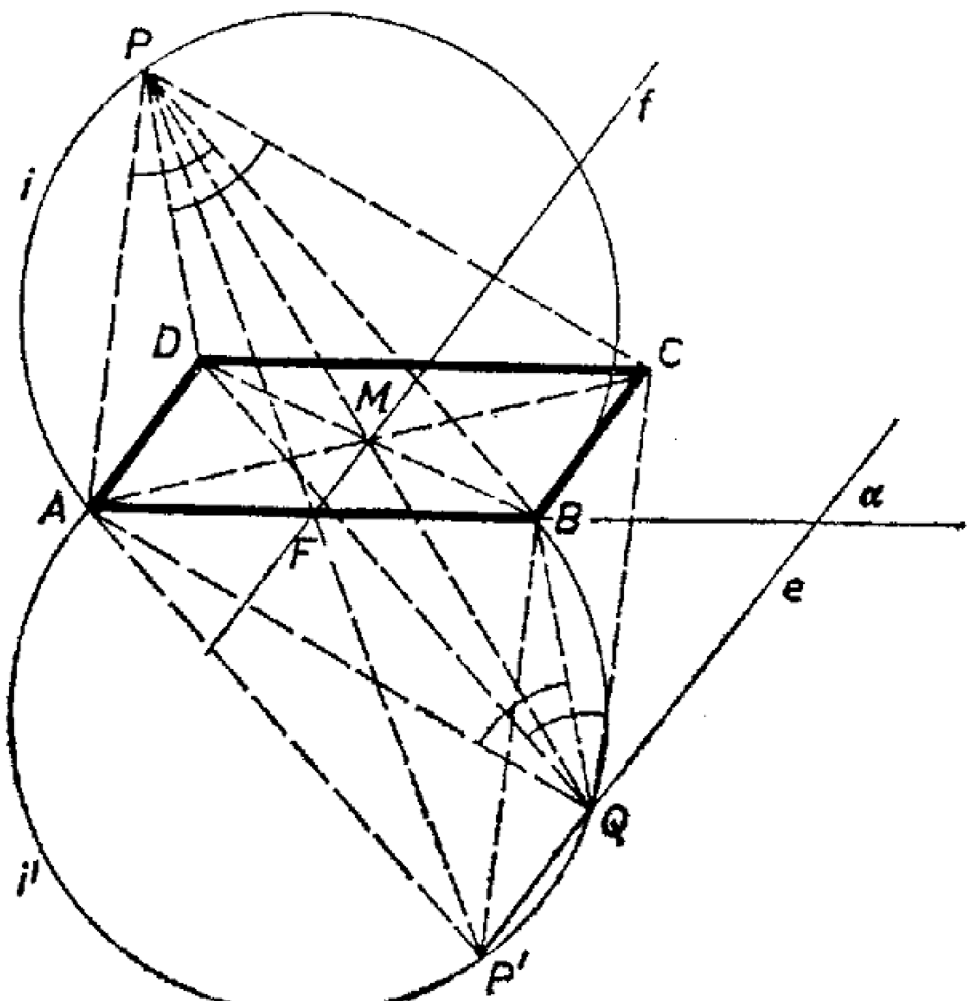
$$x=\frac{1}{9}, \qquad y=-\frac{1}{8}, \qquad z=\frac{1}{11} \qquad \text{és} \qquad u=-\frac{1}{13}.$$

Ismét mindkét számnégyes megoldása az egyenletrendszernek.

A két versenyág 2. feladata közös volt.

2. feladat. *Adott egy paralelogramma két szomszédos csúcsa és egy szöge, továbbá adott a síknak egy olyan pontja, amelyből az adott csúcsok közti oldal és a vele szemben levő oldal egyenlő szögek alatt látszik. Szerkesszük meg a paralelogrammát.*

I. megoldás. Legyenek a keresett $ABCD$ paralelogramma adott csúcsai A és B. Mivel a paralelogramma egy szöge a többit meghatározza, ezért feltehetjük, hogy az adott szög a $DAB\sphericalangle=\alpha$. Végül jelöljük a sík adott pontját – amelyből az AB és CD szakasz egyenlő szög alatt látszik – P-vel.



1. ábra

Ha meg tudjuk szerkeszteni a paralelogramma átlóinak M metszéspontját, ezzel a feladatot megoldottuk, mert C az A-nak és D a B-nek M-re vonatkozó tükörképe (1. ábra). Mivel a paralelogramma M-re szimmetrikus, azért P-nek

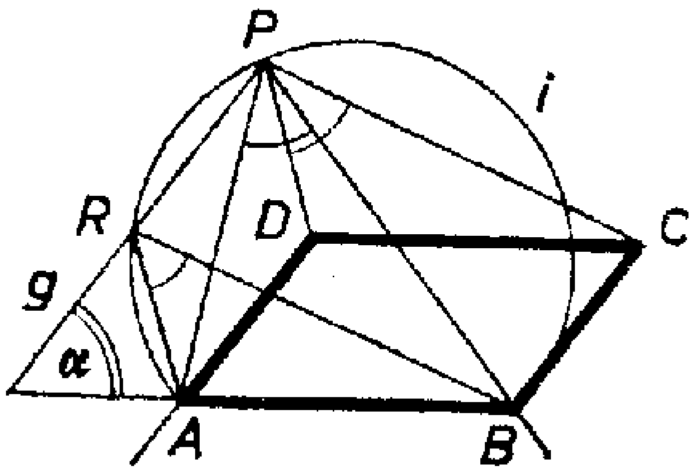
M-re vonatkozó Q tükörképéből is ugyanakkora szög alatt látszik mind az AB, mind a CD szakasz, mint P-ből. A tükrözésből következik, hogy M a PQ szakasz felezőpontja, ezért elegendő a Q pont megszerkesztése. Q rajta van az AB szakasz fölé rajzolt azon két látókörív valamelyikén, amelyek pontjaiból az AB szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint P-ből, hiszen Q-ból és P-ből az AB szakasz egyenlő szögben látszik.

Másrészt M-en átmennek a paralelogramma középvonalai. Az AD oldallal párhuzamos f középvonalát azonnal meghúzhatjuk, ez átmegy az AB szakasz F felezőpontján és α szöget zár be az AB egyenessel. Mivel a PQ szakasz felezőpontja rajta van f-en, azért Q-nak rajta kell lennie azon az f-fel párhuzamos e egyenesen, amely a P-nek az f pontjaira vonatkozó tükörképeiből áll. Így Q, mint a fenti két látókörív és az e egyenes közös pontja, megszerkeszthető.

A szerkesztés a következő: vesszük az ABP háromszög körülírt körének P-t tartalmazó $AB = i$ ívét; ez nyilvánvalóan a szóban forgó látókörívek egyike, a másika pedig ennek i' tükörképe F-re. Kimetsszük i'-n P-nek F-re vonatkozó P' tükörképét. P'-n és F-en át megszerkesztjük az AB-vel α szöget bezáró e, illetőleg f egyenest. Az e és az i, i' pár valamelyik (de P'-től különböző) Q közös pontját P-vel összekötő egyenes f-ből kimetszi M-et, végül A és B tükörképe M-re C, ill. D.

Az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert az utolsó két tükrözés miatt paralelogramma, oldalai párhuzamosak FM-mel, tehát $DAB\sphericalangle = \alpha$, végül $CPD\sphericalangle = AQB\sphericalangle = APB\sphericalangle$, mert Q a P tükörképe M-re. A feladat diszkusszióját a III. megoldás után tárgyaljuk.

Megjegyzés. f és M megszerkesztése el is maradhat. D paralelogrammává egészíti ki a PBQ háromszöget, C pedig a BAD háromszöget. – Így természetesen a bizonyítás is módosul: P' szerkesztése szerint $PAP'B$ paralelogramma, D (új) szerkesztése szerint $PBQD$ szintén, így az APD és $P'BQ$ háromszögben az AP és $P'B$, továbbá PD és BQ oldalak egy irányban párhuzamosak és egyenlők, tehát az AD és $P'Q$ oldalak is, vagyis $DA\|e$, $DAB\sphericalangle = \alpha$.



2. ábra

II. megoldás. Toljuk el a PCD háromszöget úgy, hogy D csúcsa A-ba kerüljön (2. ábra). Ezáltal C a B-be kerül, P pedig egy olyan R pontba, melyből az AB szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint P-ből CD, vagyis mint P-ből AB. R tehát rajta van az előbbi két látókörív valamelyikén.

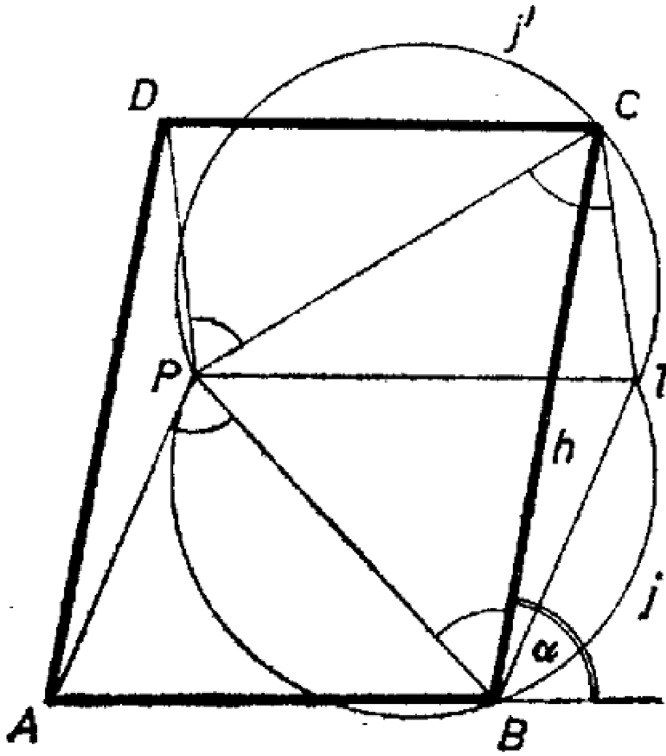
Másrészt az eltolás közben P az AD-vel párhuzamosan mozgott, így R rajta van a P-n átmenő és az AB egyenessel α szöget bezáró g egyenesen. Ezek alapján R, mint g és a két látókörív közös pontja, megszerkeszthető, D pedig paralelogrammává egészíti ki az ARP háromszöget.

III. megoldás. Mindkét fenti megoldásban első lépésként két körív és egy egyenes metszéspontját kerestük meg, ebből kaptuk meg a paralelogramma csúcsait. Az I. megoldásban a metszéspontból előbb a paralelogramma középpontját határoztuk meg, a II. megoldásban a metszéspontból már közvetlenül kaptuk az egyik csúcsot. Most olyan megoldást adunk, melyben a körívek és egy egyenes metszéspontja mindjárt maga az egyik csúcs. Egészítsük ki a BAP háromszöget a T ponttal a $BAPT$ paralelogrammává (3. ábra). Ekkor a $CDPT$ négyszög is paralelogramma, PA és TB, valamint PD és TC is párhuzamosak, ezért és a feltevés miatt

$$PCT\sphericalangle = CPD\sphericalangle = BPA\sphericalangle = PBT\sphericalangle,$$

vagyis C-ből a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B-ből. C tehát rajta van azon két j, j' látókörív valamelyikén, melyeknek pontjaiból a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B-ből. Másrészt C rajta van a B-n átmenő, AB-vel α szöget bezáró h egyenesen is ($CBA\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$), tehát C e két mértani hely közös pontja.

Kimutatjuk, hogy e közös pontok bármelyike megfelel C-ként – kivéve természetesen B-t. Mivel C rajta van h-n, azért a paralelogramma szögei megfelelők, továbbá $PD\|TC$. Másrészt C rajta van j és j' valamelyikén, ezért $DPC\sphericalangle = PCT\sphericalangle = PBT\sphericalangle = BPA\sphericalangle$, mint állítottuk.

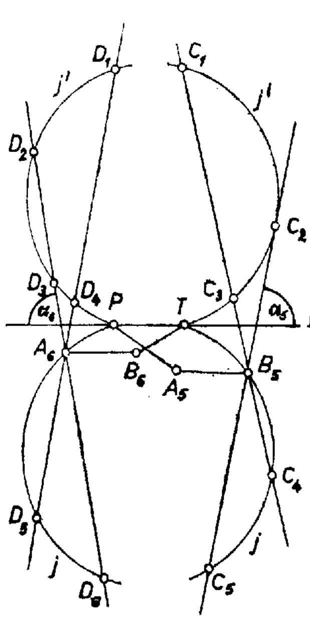


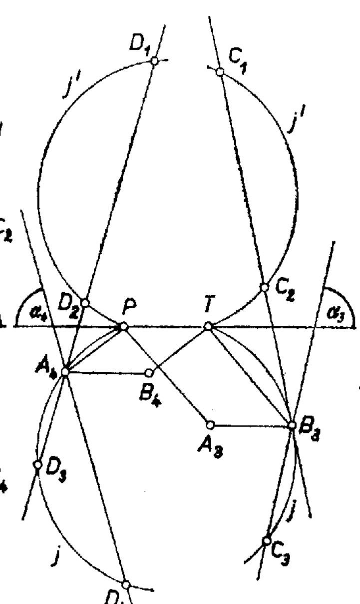
3. ábra

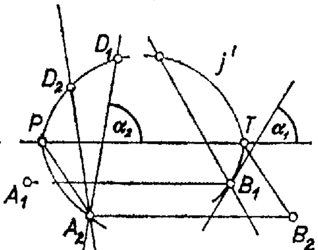
Ezek alapján a szerkesztés a következő: párhuzamost húzunk P-n át AB-vel és B-n át AP-vel, e két egyenes metszéspontja T. Megrajzoljuk a BPT háromszög köré írt kör B-t tartalmazó $PT = j$ ívét és ennek PT-re, való j' tükörképét. Ezután B-n át meghúzzuk azt a h egyenest, amely AB-vel α szöget zár be. Ekkor h-nak j-vel, j'-vel való, B-től különböző közös pontja (e közös pontok bármelyike) adja a paralelogramma C csúcsát.

h-nak mindkét ívvel legfeljebb két közös pontja van, és j-vel mindenesetre közös pontja B, azért a megoldások száma legfeljebb 3. Csak abban az esetben nem kapunk megoldást, ha B a h-nak j-vel egyetlen közös pontja, és itt érintkeznek, j'-vel pedig nincs közös pontja. (*Ha ugyanis h a j-t B-ben *metszi,* akkor van pontja a j, j' ívekkel határolt idom belsejében, így a kilépési pont megfelel C-ként.)

Ha elejtjük azt az előírást, hogy az adott szög a paralelogramma A-nál levő szöge legyen, akkor h-nak az AB egyenesre való h^* tükörképe is tekintetbe veendő. Ekkor a megoldások száma 6, 5, 4, 3, 2 vagy 1 (a 4–6. ábrákon példákat látunk ilyen helyzetekre, 1 megoldás van az 1–3. ábrák helyzeteiben is). Kimutatjuk ugyanis, hogy így minden esetben létezik legalább 1 megoldás. (A 4–6. ábrák 2–2 felén csak P és T közös.)







4. *ábra* 5. *ábra* 6. *ábra*

Elég az olyan helyzeteivel foglalkoznunk h^*-nak, amelyekben fentebb h nem adott megoldást. Ekkor h^* – amennyiben különböző a h-tól – nem érinti, hanem metszi j-t B-ben és a fenti (*) megjegyzés szerint megoldást szolgáltat.

Ha pedig h^* egybeesik h-val, akkor $\alpha = 90^\circ$ (mert $\alpha = 0^\circ$ nyilvánvalóan nem jön szóba), így h merőleges PT-re, és mivel B-ben érinti j-t, azért a szimmetria miatt B-nek PT-re való tükörképében érinti j'-t, ez a közös pont megoldást ad.

Könnyű belátni, hogy j, j' az I. és II. megoldásban szerepelt i, i' körívpárból AP irányú és nagyságú eltolással áll elő, hogy ugyanez áll fenn h és az I. megoldásbeli e egyenes között, végül hogy a II. megoldásbeli g egyenes az e tükörképe F-re. Ezért a III. megoldásra adott diszkusszió a megfelelő változtatásokkal az I. és II. megoldásra is érvényes.

*

Az általános verseny **3. feladata:** *Határozzuk meg a (tízes alapú számrendszerben felírt) $ABCC$ számot, ha*

$$ABCC = (DD - E) \cdot 100 + DD \cdot E,$$

ahol A, B, C, D és E különböző számjegyek.

Megoldás. A szereplő többjegyű számokat a következőképpen alakítjuk át:

$$ABCC = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 11 \cdot C, \qquad DD = 11 \cdot D.$$

Ezeket behelyettesítve rendezzünk úgy, hogy a bal oldalra kerüljenek azok a tagok, amelyekben az egyik tényező 100, a többiek a jobb oldalra:

$$(10 \cdot A + B - 11 \cdot D + E) \cdot 100 - 11 \cdot (D \cdot E - C), \tag{2}$$

így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie 100-zal. Ez csak úgy lehetséges, ha $D \cdot E - C$ osztható 100-zal. Mivel D, E és C mindegyike 0 és 9 közé esik, és különbözők, azért $D \cdot E - C$ legfeljebb $9 \cdot 8 - 0 = 72$, és legalább $0 \cdot 1 - 9 = -9$. Márpedig -9 és 72 között csak egyetlen 100-zal osztható szám van, mégpedig 0, így $D \cdot E = C$, továbbá (2) bal oldalán is 0-nak kell állnia, ezért a zárójelen belüli kifejezés 0. Írjunk ebben $10 \cdot A$ helyett $11 \cdot A - A$-t, és rendezzük át az egyenletet:

$$B + E - A = 11 \cdot (D - A).$$

Mivel D és A különbözőek, ezért a jobb oldal, s így a bal oldal is 0-tól különböző szám. Továbbá a jobb oldal osztható 11-gyel, tehát a bal oldal is. Ezek szerint $B + E - A$ 11-gyel osztható és 0-tól különböző (egész) szám. Másrészt, mivel B, A és E ugyancsak 0 és 9 közé esnek és $A \neq 0$, ezért $B + E - A$ legfeljebb $9 + 8 - 1 = 16$, és legalább $0 + 1 - 9 = -8$. Mármost -8 és 16 között 0-tól különböző és 11-gyel osztható szám csak egy van, a 11. Ezért $B + E - A = 11$, amiből $D - A = 1$ adódik.

Eddig tehát a következőket állapítottuk meg:

$$D \cdot E = C, \qquad B + E - A = 11 \qquad \text{és} \qquad D = A + 1.$$

A harmadik egyenlőségből A-t kifejezve és a másodikba behelyettesítve:

$$B + E = D + 10,$$

amit átrendezve:

$$E = D + (10 - B).$$

Mivel B legfeljebb 9, ezért $10 - B$ legalább 1, és így E legalább $D + 1$, más szóval E nagyobb D-nél. Ennek alapján $D \cdot D$ kisebb, mint $D \cdot E$, vagyis C, ami legfeljebb 9; azaz D^2 kisebb 3^2-nél, D kisebb 3-nál. Másrészt $D = A + 1 \geq 2$, így $D = 2$, amiből $A = 1$, továbbá

$$C = 2E \qquad \text{és} \qquad B + E = 12.$$

$E > D$ miatt $E \geq 3$. Másrészt $E \leq 4$, különben C kétjegyű szám lenne. Az $E = 4$ esetben $C = B(= 8)$ adódik, ami ismét nem felel meg a számjegyek különbözőségének. Az egyetlen maradó lehetőség $E = 3$, amiből $C = 6$, és $B = 9$.

A jegyek adódott értékei valóban kielégítik a feltételeket:

$$1966 = (22 - 3) \cdot 100 + 22 \cdot 3.$$

A matematikai osztályok versenyének **3. feladata:** *Keressük meg az olyan hatjegyű négyzetszámokat, amelyeknek első három jegyét letörölve a szám négyzetgyökét kapjuk.*

Megoldás. Jelöljük a szám négyzetgyökét x-szel. x^2 hatjegyű szám, ezért x háromjegyű és x^2 első három jegyét letörölve keletkezik, vagyis az x^2 utolsó három jegyéből álló szám. Így tehát $x^2 - x = x(x-1)$ utolsó három jegye 0, osztható 1000-rel. Feladatunk tehát olyan x háromjegyű számok keresése, melyekre $x(x-1)$ osztható $1000 = 125 \cdot 8$-cal.

Vizsgáljuk a 125-tel való oszthatóságot. Mivel $x(x-1)$ osztható 125-tel, ezért osztható 5-tel is. x-nek és $x-1$-nek legnagyobb közös osztója 1, ezért x és $x-1$ közül csak egyik lehet 5-tel osztható. Ekkor viszont az 5-tel osztható tényező osztható 125-tel is, így azt kaptuk, hogy x és $x-1$ egyike osztható 125-tel.

Hasonló okoskodással belátható, hogy a két tényező valamelyike osztható 8-cal. Az azonban nem lehet, hogy ugyanaz a tényező osztható 125-tel és 8-cal, ekkor ugyanis ez a tényező osztható lenne $125 \cdot 8 = 1000$-rel is, tehát legalább négyjegyű szám lenne. Így x és $x-1$ egyike 125-tel és a másik 8-cal osztható. Olyan többszörösét kell keresnünk a 125-nek, amelyiknek valamelyik szomszédja, vagyis az 1-gyel kisebb vagy 1-gyel nagyobb szám osztható 8-cal. Ez a szomszéd páros is és 4-gyel is osztható, ezért elég 125 páratlan többszöröseivel próbálkozni, ezek: 125, 375, 625 és 875. Szomszédaik közül a 26-ra és 74-re végződők még 4-gyel sem oszthatók, 124 és 876 sem osztható 8-cal, így csak két számpár marad: $x = 376$ és $x - 1 = 375$, valamint $x = 625$ és $x - 1 = 624$.

Valóban: $376^2 = 141\,\mathbf{376}$ és $625^2 = 390\,\mathbf{625}$.

Fried Ervin