Racionális együtthatós egyenletek gyökjelekkel felírt megoldásairól

Ha valamilyen módon rájöttünk, hogy pl. a

$$2x^5 - 196x^3 - 163x^2 + 9 = 0$$

egyenletnek gyöke $5+2\sqrt{7}$, akkor azt várjuk, hogy $-2\sqrt{7}+5$ is gyök, és a behelyettesítés azt mutatja, hogy így is van. Végezzük a helyettesítést az egyenlet bal oldalába mindkét esetben ugyanolyan eljárással, pl. a bal oldal

$$\left(\left\{\left[(2x)x - 196\right]x - 163\right\}x\right)x + 9$$

alakú, ún. *Horner*-féle átrendezése alapján (az alábbi táblázat első sorában az együtthatók állnak, amiket az előtte álló oszlopbeli szám x-szereséhez adva kapjuk az alattuk álló számot):

x	2	0	-196	-163	0	9
$5+2\sqrt{7}$	2	$10+4\sqrt{7}$	$-90+40\sqrt{7}$	$-53+20\sqrt{7}$	$15-6\sqrt{7}$	0
$-2\sqrt{7}+5$	2	$10-4\sqrt{7}$	$-90-40\sqrt{7}$	$-53-20\sqrt{7}$	$15+6\sqrt{7}$	0

Feltűnő, hogy az eltérés mindössze annyi, hogy a két számításban $\sqrt{7}$ szorzójának az előjele ellenkező. Meg fogjuk mutatni, hogy ez nem véletlen, és éppen ez az oka annak, hogy a fent említett várakozásunkban általában nem csalatkozunk.

Mindenek előtt meg kell fogalmaznunk, mi is az, amit várunk.

TÉTEL. *Legyen $f(x)$ egy racionális együtthatós polinom, a, b racionális szám, c olyan racionális szám, ami nem négyzete egy racionális számnak.*

Ha ezek mellett a feltételek mellett $a+b\sqrt{c}$ gyöke az $f(x)=0$ egyenletnek, akkor $a-b\sqrt{c}$ is gyöke.

Bizonyítás: Ha $a+by$-t helyettesítünk $f(x)$-ben x helyébe, akkor y egy racionális együtthatós polinomját kapjuk. Vonjuk ebben külön össze y páros hatványait a páratlan hatványokból pedig emeljük ki y-t; így y szorzója szintén y-nak egy csak páros hatványait tartalmazó polinomja, vagyis y^2-nek egy racionális együtthatós polinomja lesz. Ilyen átalakítással tehát azt kapjuk, hogy

$$f(a+by) = g(y^2) + y \cdot h(y^2),$$

ahol $g(z)$ és $h(z)$ egy-egy racionális együtthatós polinom.

Itt y helyébe $\sqrt{c}$-t, másszor $-\sqrt{c}$-t helyettesítve, y^2 mindkétszer c lesz, s így

$$f\left(a+b\sqrt{c}\right) = g(c) + h(c)\cdot\sqrt{c},$$
$$f\left(a-b\sqrt{c}\right) = g(c) - h(c)\cdot\sqrt{c}.$$

Az első érték csak úgy lehet 0, ha $h(c)=0$ – és akkor természetesen $g(c)$ is 0 –, hiszen különben $\sqrt{c} = -g(c)/h(c)$, $c = \left(g(c)/h(c)\right)^2$, tehát c racionális szám négyzete volna, ez pedig feltétel szerint nem áll fenn. Ha viszont $g(c)=h(c)=0$, akkor $f\left(a-b\sqrt{c}\right)=0$ is teljesül. Ezt akartuk bizonyítani.

Hasonló probléma merült fel az 1434. feladattal kapcsolatban is, de kicsit bonyolultabb feltételek mellett[1]: azt kellett belátni, hogy

$$\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)/4 = \left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{u}\right)/4$$

gyöke egy egész együtthatós egyenletnek, és annak révén sikerült célt érnünk, hogy megmutattuk: vele együtt $\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{u}\right)/4$ is gyök. Várható, hogy itt sem csak a szerencse állt mellénk, és az előzőkhöz nem is kell sokat hozzátenni, hogy ezt belássuk.

Az előző bizonyításban azt használtuk fel, hogy egy racionális együtthatós polinom változója helyébe egy racionális együtthatós polinomot helyettesítve újra racionális együtthatós polinomot kapunk. Egy ilyen helyettesítésnél az új együtthatók a régiekből véges számú összeadás, kivonás és szorzás elvégzésével adódnak, ezek pedig racionális számokból újra racionális számokat eredményeznek. Egy lépésben azt is kihasználtuk, hogy $g(c)/h(c)$ is racionális szám, ha $g(c)$ és $h(c)$ az, tehát az osztás sem „vezet ki” a racionális számok köréből. A négyzetgyökvonás azonban már kivezethet, mint pl. $\sqrt{7}$ esetében, és általában is éppen azt tettük fel, hogy $\sqrt{c}$ már nem racionális.

Az említett feladatban viszont $\sqrt{u}$-nál a négyzetgyökjel alatti szám sem racionális; $a+b\sqrt{5}$ alakú, ahol a és b racionális, és ilyen szám áll $\sqrt{u}$ előtt és a nevezőben is (az utóbbinál $a=4$, $b=0$). Az ilyen alakú számokról is

[1] Lásd a feladat II. megoldását, K. M. L. 33 (1966) 128. o.

belátható azonban, hogy a négy alapművelet nem vezet ki közülük. Összegre és különbségre ez világos, szorzatra és hányadosra pedig így látható:

$$\left(a+b\sqrt{5}\right)\left(c+d\sqrt{5}\right)=(ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5},$$
$$\frac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}=\frac{\left(a+b\sqrt{5}\right)\left(c-d\sqrt{5}\right)}{c^2-5d^2}=\left(\frac{ac-5bd}{c^2-5d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2-5d^2}\right)\cdot\sqrt{5}.$$

Itt nem nehéz belátni, hogy $c^2-5d^2\neq 0$, ha c és d racionális, az egyes zárójelekben pedig racionális szám áll.

Ezek után már nem nehéz látni, hogy a fenti bizonyítás akadály nélkül megismételhető, „racionális szám" helyett kell mindig azt mondani, hogy „$a+b\sqrt{5}$ alakú szám, ahol a és b racionális". Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy nincs olyan racionális r és s szám, amire $30+6\sqrt{5}=\left(r+s\sqrt{5}\right)^2$. Valóban, az egyenletet így rendezhetjük át:

$$2(3-rs)\sqrt{5}=r^2+5s^2-30,$$

ami csak úgy teljesülhet, ha

$$rs=3 \quad \text{és} \quad r^2+5s^2-30=0,$$

mert különben $\sqrt{5}$ racionális volna. A második egyenletet r^2-tel szorozva és felhasználva az elsőt

$$r^4-30r^2+45=0, \qquad r=\pm\sqrt{15\pm\sqrt{180}}=\pm\sqrt{15\pm 6\sqrt{5}}.$$

Ez azonban az előjelek semmilyen választása mellett nem lehet racionális, mert abból négyzetreemelés után könnyen adódnék ismét, hogy $\sqrt{5}$ is racionális volna.

A bizonyítás többi lépéseinek végiggondolását az olvasóra bízzuk. Láthatjuk, hogy itt egy a kimondottnál jóval általánosabb tétel speciális eseteiről van szó,[2] annak megfogalmazása azonban kicsit bonyodalmas volna.

Surányi János

[2] Az 1021. gyakorlatban – K. M. L. 33 (1966) 69. o. – arra láttunk példát, hogy az $a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}$ (a, b, c racionális) alakú számok köréből sem vezetett ki az ott végzett szorzás és osztás.