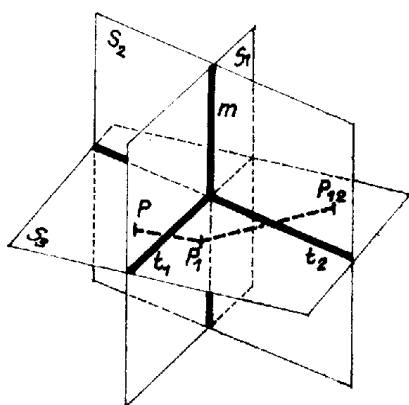


Az 1432. feladat<sup>1</sup> III. részében láttuk, hogy a tetraéder a  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2$  forgatások végrehajtásával visszajut eredeti helyzetébe. Jól megnézve a közben elfoglalt helyzetek sorozatát, azt látjuk, hogy az  $S$  csúcstól a közép felé tekintve pozitív forgási irányban. Így már  $H_1, H_2, H_5$  és  $H_6$  elemzéséből is kiadódott volna, hogy bármelyik forgás-pár 3-szori alkalmazásával a tetraéder ugyanazon tengely körül  $3 \cdot 240^\circ$ -kal, azaz  $2 \cdot 360^\circ$ -kal fordul el, vagyis visszajut kiindulási helyzetébe.

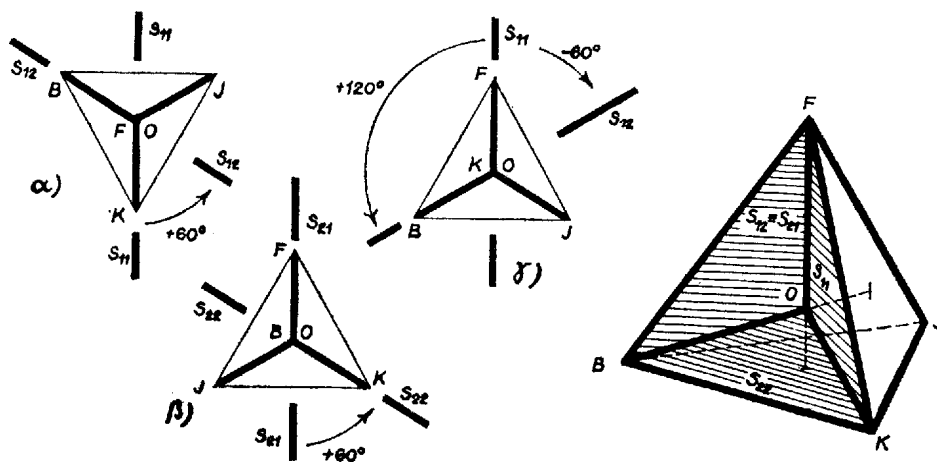
Alább más úton mutatom meg, hogy egy  $\varphi_1, \varphi_2$  forgás-pár helyettesíthető a mondott forgással. Ismeretes a síkmér-tanból, hogy két metsző egyenesen való egymás utáni tükrözés helyettesíthető olyan forgatással, melynek középpontja a két tükrözés tengelyének metszéspontja, a forgatás szöge pedig kétszer akkora, mint az első tengelyt a másodikba átvivő forgatás szöge (a második tükrökép, valamint a tengely elfordulását ugyanabban az irányban értve). Ebből következik, hogy ha a két tükröző egyenest metszéspontjuk körül úgy forgatjuk, hogy hajlásszögük nem változik, akkor a két tükrözés eredője sem változik.



1. ábra

Fordítva, egy forgatás helyettesíthető két olyan egymás utáni tükrözéssel, amelyek tengelyei átmennek a forgás középpontján és az első tükrözés tengelyét a másodikéba fele akkora szögű (ugyanolyan irányú) forgatás viszi át. Ha tehát adott egy forgatás középpontja, szöge és iránya, és megválasztottuk a forgatást helyettesítő tükrözés-pár egyikének tengelyét (a középponton át, és azt is kimondva, hogy ez az első vagy a második tükrözésnek legyen a tengelye), ezzel egyértelműen meghatároztuk a másik tükrözés tengelyének helyzetét.

Mindez a térben is érvényes, ha egyeneseken való tükrözések helyett két egymást metsző síkon tükrözünk egy alakzatot egymás után, a síkok sorrendjét is megadva, és ha a forgatás tengelyének a két sík metszévonalát vesszük. Ha ugyanis az alakzat egy tetszés szerinti  $P$  pontjának tükröképe egy  $S_1$  síkra  $P_1$ , ennek képe egy az  $S_1$ -et  $m$ -ben metsző  $S_2$  síkra  $P_{12}$ , akkor  $PP_1 \perp S_1, P_1P_{12} \perp S_2$ , így a  $PP_1P_{12} = S_3$  sík merőleges  $S_1$ -re,  $S_2$ -re és  $m$ -re. Ezért  $P$ -nek  $m$  körüli forgatása  $S_3$ -ban folyik le  $m$  és  $S_3$  metszéspontja körül, az  $S_1$ -et  $S_2$ -be átvivő forgás szögét ugyancsak  $S_3$ -ban mérhetjük meg, ennek  $S_1$ -gyel alkotott  $t_1$  és  $S_2$ -vel alkotott  $t_2$  metszévonalai között, ennél fogva  $P_1$ -et,  $P_{12}$ -t megadja a  $t_1$ -re, majd a  $t_2$ -re való tükrözés is.



2. ábra

<sup>1</sup>Lásd K. M. L. 33 (1966) 124. o.

Az előbbiek szerint a  $\varphi_1$  forgatás helyettesíthető két olyan  $S_{11}$  és  $S_{12}$  síkra, való egymás utáni tükrözéssel, melyeknek metszésvonala a tetraéder  $F$ -ből kiinduló magasságának egyenese, hajlásszögük  $60^\circ$ , és az  $S_{11}$ -et  $S_{12}$ -be átvivő forgás  $F$ -ből a  $BKJ$  lap felé nézve pozitív irányú. Ugyanígy  $\varphi_2$  helyettesíthető két olyan a  $B$ -ből induló magasságegyenesen átmenő  $S_{21}$  és  $S_{22}$  síkra való egymás utáni tükrözéssel, ahol az  $S_{21}$ -et  $S_{22}$ -be átvivő  $60^\circ$ -os forgás  $B$ -ből az  $FJK$  lap felé nézve pozitív irányú. Jelentős egyszerűsödést érünk el mármost annak felhasználásával, hogy a két síkpár metszésvonalai a tetraéder  $O$  középpontjában metszik egymást, ha  $S_{12}$ -ként is,  $S_{21}$ -ként is az  $FOB$  síkot választjuk. Ekkor a harmadik tükrözés lerontja a második tükrözés hatását (az  $S_{21}$ -en való tükrözés visszaállítja az  $S_{12}$ -n való tükrözés előtti helyzetet), csak az  $S_{11}$ -en való tükrözéssel előállított képet kell tükröznünk  $S_{22}$ -re; e két tükrözés egymásutánja pedig helyettesíthető lesz egyetlen forgatással a metszésvonaluk körül.

Mármost a közös  $FOB$  síkhoz mint  $S_{12}$ -höz  $S_{11}$ -ként az  $FOK$  sík tartozik hozzá, mint  $S_{21}$ -höz  $S_{22}$ -ként a  $BOK$  sík (a 2. ábra  $\alpha$  és  $\beta$  részén a nézőhöz legközelebbi csúcs  $F$ , illetőleg  $B$ ). E két sík metszésvonala  $KO$ , és az  $S_{11}$ -et  $S_{22}$ -be  $+120^\circ$ -os forgás viszi át ( $\gamma$  rész), tehát  $\varphi_1\varphi_2$  eredője a  $KO$  tengely körüli  $+240^\circ$ -os forgatás. (Természetesen ha negatív forgási irányt kívánunk, a két sík forgási szöge  $-60^\circ$ , és az eredő forgás  $-120^\circ$ -os.)

A bemutatott megmondolás más esetekben is alkalmas forgások, tükrözések eredőjének meghatározására.

**Vigassy Lajos**