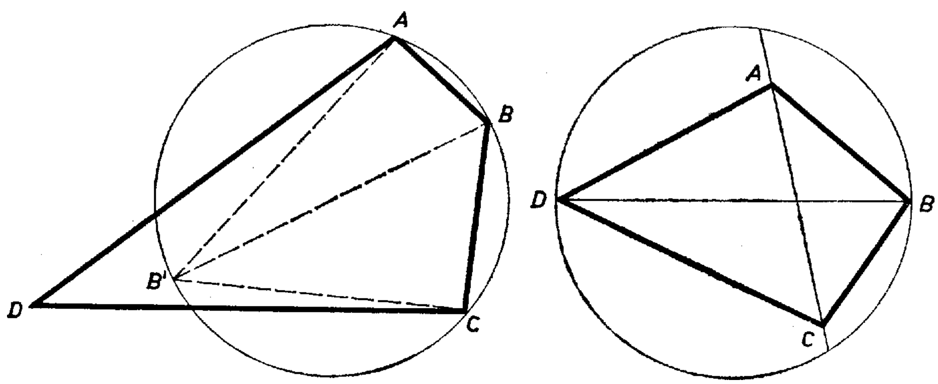
**Az 1965. évi Arany Dániel tanulóversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása**

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

*A speciális matematikai osztályok feladatai*

**1. feladat.** *Bizonyitsuk be, hogy ha egy konvex négyszögnek* 3 *szöge tompaszög, akkor a negyedik szög csúcsából kiinduló átló hosszabb a másik átlónál.*

**I. megoldás.** Legyen az $ABCD$ konvex négyszög $A$, $B$ és $C$ csúcsánál levő szöge tompaszög. Írjunk kört az $A$, $B$, $C$ csúcsok köré, ennek $B$-vel átellenes pontja legyen $B'$. Ez a $BAD$ szögtartománynak is, a $BCD$ szögtartománynak is a belsejében van, ugyanis Thalész tétele szerint $BAB'\sphericalangle = BCB'\sphericalangle = 90°$, az $AB'$ és $CB'$ félegyenes is a megfelelő szögtartomány belsejében halad. Ebből következik, hogy a $BB'D$ konvex szög a $BAD\sphericalangle$, $BOD\sphericalangle$ egyikénél nagyobb, tehát tompaszög. Igy a $BB'D$ háromszög legnagyobb oldala nagyobb $BB'$-nél, ez pedig, mint körátmérő, nem kisebb a kör $AC$ húrjánál.

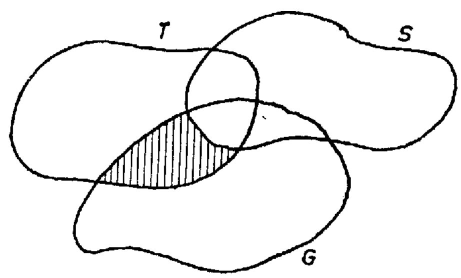



**II. megoldás.** Az előző megoldás jelöléseit és feltételeit használjuk. Rajzoljunk kört a $BD$ átló mint átmérő fölé. Azok a pontok, amelyekből $BD$ tompaszögben látszik, a kör belsejében vannak, így $A$ és $C$ is. $AC$ tehát a kör belsejében levő szakasz, s így kisebb, mint a kör átmérője, $BD$.

*Megjegyzés.* Csak azt használtuk fel mind a két megoldásban, hogy $A$-nál és $C$-nél tompaszög van. Ebből a négyszög konvex volta is következik. Így azt bizonyítottuk be, hogy *ha egy négyszög két szemben fekvő szöge tompaszög, akkor az ezek csúcsát összekötő átló rövidebb a másik átlónál.*

A *verseny 2. feladata* ugyanaz volt, mint az általános versenyen; megoldását lásd ezen kötet 52-53. oldalain.

**3. feladat.** *Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:*
*a) Van olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő.*
*b) Akinek bérlete van a Gellért-fürdőbe, de nem szobafestő, az nem televízió-tulajdonos.*
*Döntsük el és indokoljuk meg, hogy következik-e a)-ból és b)-ből az alábbi állítás:*
*c) Nem minden televízió-tulajdonosnak van bérlete a Gellért-fürdőbe.*




**1. megoldás.** Rajzoljunk a síkban egy $T$, egy $S$ és egy $G$ tartományt úgy, hogy legyen mindháromnak közös része, bármely kettő közös részének legyen olyan része, amelyik nem tartozik a harmadikhoz, és legyen mindegyiknek a másik kettőn kívül eső része ís. Gondoljuk a televízió-tulajdonosokat a $T$-tartomány belsejének pontjaival jelölve, a szobafestőket az $S$ pontjaival, azokat pedig, akiknek bérletük van a Gellért-fürdőbe, a $G$ pontjaival. Ekkor a *b)* állítás azt jelenti, hogy a $G$-be, de $S$-en kívül teendő pontok, ha vannak, nem kerülhetnek $T$-be sem, tehát az a tartomány, ami

$T$-hez és $G$-hez is tartozik, de $S$-en kívül fekszik, egyetlen kijelölt pontot sem tartalmaz. Ezt az ábrán vonalkázással jelöltük.

Az *a)* állítás szerint van pont a $T$-nek $B$-hez nem tartozó részében. Ez nem kerülhet a bevonalkázott részbe, tehát $G$-n is kívül van, vagyis olyan televízió-tulajdonost jelöl, akinek nincs bérlete a Gellért-fürdőbe. Eszerint a *c)* állítás következik *a)*-ból és *b)*-ből.

**II. megoldás.** A *b)* állítás így is fogalmazható: nincs olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő, de bérlete van a Gellért-fürdőbe. Eszerint egy olyan televízió-tulajdonosnak, akire az *a)* állítás teljesül, nem lehet bérlete a Gellért-fürdőbe. Mivel az *a)* állítás ilyen személy létezését mondja ki, így *a)*-ból és *b)*-ből következik a *c)* állítás.

**Surányi János**