Az 1965. évi Arany Dániel tanulóversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) versenye

(2. közlemény)

A speciális matematikai osztályok feladatai

1. feladat. *Bizonyítandó, hogy ha n kettőnél nagyobb és egész, akkor*

$$(2n-1)^n + (2n)^n < (2n+1)^n. \tag{1}$$

Megoldás. Az egyenlőtlenséget az átrendezett

$$(2n)^n < (2n+1)^n - (2n-1)^n \tag{1a}$$

alakban fogjuk bizonyítani. Rendezzük a jobb oldali hatványokat $2n$ hatványai szerint. Mind a két kifejezés $(a+b)^n$ alakú, ahol $a=2n$, és b az egyik esetben 1, a másik esetben -1. Az n-edik hatvány egy n tényezős szorzatot jelent. Ennek a tagokra bontott alakját úgy kapjuk, hogy minden lehető módon kiveszünk mindegyik tényezőből egy-egy tagot, ezeket összeszorozzuk, és az összes ilyen szorzatokat összeadjuk.

Végezzük a fenti két hatvány tagokra bontását párhuzamosan úgy, hogy mindkettőben ugyanannyiadik tényezőkből választjuk a $2n$-et és a többiből az első kéttagúnál a $+1$-et, a másodiknál a -1-et. Ha páros számú tényezőből választjuk a $+1$-et, ill. a -1-et, akkor egyenlő tagok keletkeznek, és ezek a kivonáskor kiesnek (így az a két tag is, amelyhez mindegyik tényezőből a $2n$-et választjuk ki). Ha viszont páratlan számú tényezőből választjuk a $+1$-et, illetőleg a -1-et, akkor egyenlő abszolút értékű tagok keletkeznek, de $(2n+1)^n$-ből pozitív előjellel, $(2n-1)^n$-ből negatív előjellel, a kivonásnál tehát ezek kétszerese adódik. Az összes ilyen tagok összege adja a jobb oldalt. Azt csökkentjük tehát, ha ezek közül a tagok közül csak egyeseket veszünk tekintetbe.

Nézzük azokat a tagokat, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy híjján minden tényezőből a $2n$-et választjuk. Egyrészt ezek mindegyike $2(2n)^{n-1}$-t ad a különbséghez, másrészt ilyen tag n-szer keletkezik, mert az a tényező, amelyikből nem a $2n$-et (tehát az 1-et, ill. a -1-et) választottuk, vagy az első vagy a második stb. vagy az n-edik. Az (1a) jobb oldala tehát legalább $n\cdot 2\cdot(2n)^{n-1}=(2n)^n$, és nagyobb ennél, ha fennáll az a lehetőség is, hogy három tényezőből válasszuk a $+1$-et, ill. a -1-et, vagyis ha n legalább 3. Ezzel az egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A követett gondolatmenet mutatja, hogy $(a+b)^n$-t a és b hatványai szerint rendezve $a^k b^{n-k}$ alakú tagok keletkeznek, ahol $k=0,1,2,\ldots,n$ lehet, és a felírt tag együtthatója az a szám, ahányféleképpen n különböző dolog közül k-t ki lehet választani, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel. (Ennyi módon választhatunk ki k tényezőt, hogy azokból a-t, a többiből b-t vegyük ki tényezőül.)

II. megoldás. Kézenfekvő (1a) jobb oldalának első tagjából levonni, a másodikhoz hozzáadni $(2n)^n$-t, mivel a kifejezést $2n$ egy hatványával akarjuk összehasonlítani. Ekkor a fellépő különbségekben az alapok különbsége 1, és ezért az egyenlő kitevőjű hatványok különbsége így alakítható át:

$$\begin{aligned}(2n+1)^n-(2n-1)^n &= (2n+1)^n-(2n)^n+(2n)^n-(2n-1)^n=\\ &=(2n+1)^{n-1}+(2n+1)^{n-2}\cdot(2n)+(2n+1)^{n-3}(2n)^2+\ldots+(2n+1)(2n)^{n-2}+\\ &+(2n)^{n-1}+(2n)^{n-1}+(2n)^{n-2}\cdot(2n-1)+\ldots+(2n)(2n-1)^{n-2}+\\ &+(2n-1)^{n-1}=[(2n+1)^{n-1}+(2n-1)^{n-1}]+(2n)[(2n+1)^{n-2}+\\ &+(2n-1)^{n-2}]+\ldots+(2n)^{n-2}[(2n+1)+(2n-1)]+2\,(2n)^{n-1}.\end{aligned}$$

A kifejezést n tagra bontottuk, így az egyenlőtlenség igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy a kifejezés növekszik, ha mindenütt, ahol előfordul, $2n+1$-et és $2n-1$-et egyidejűleg $(2n)$-nel helyettesítjük. Az utolsó előtti tagnál ez nem okoz változást, a többinél viszont nagyobbítást jelent, ugyanis ha $l>1$,

$$\begin{aligned}(2n+1)^l+(2n-1)^l-2(2n)^l &= (2n+1)^l-(2n)^l-[(2n)^l-(2n-1)^l]=\\ &=(2n+1)^{l-1}+(2n+1)^{l-2}\cdot(2n)+\ldots+(2n+1)(2n)^{l-2}+(2n)^{l-1}-\\ &-[(2n)^{l-1}+(2n)^{l-2}\cdot(2n-1)+\ldots(2n)(2n-1)^{l-2}+(2n-1)^{l-1}]=\\ &=[(2n+1)^{l-1}-(2n-1)^{l-1}]+(2n)[(2n+1)^{l-2}-(2n-1)^{l-2}]+\ldots+\\ &+(2n)^{l-2}\cdot[(2n+1)-(2n-1)]>0.\end{aligned}$$

Ezzel a feladat állítása igazolást nyert.

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség belátható az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére vonatkozó azonosság ismételt alkalmazásával is:

$$\begin{aligned}(2n+1)^n-(2n-1)^n &= (2n+1)^n-(2n)^n+(2n)^n-(2n-1)^n=\\ &=[(2n+1)^{n-1}+(2n-1)^{n-1}]+(2n)[(2n+1)^{n-2}+(2n-1)^{n-2}]+\\ &+\ldots+(2n)^{n-2}\cdot[(2n+1)+(2n-1)]+2(2n)^{n-1}.\end{aligned}$$

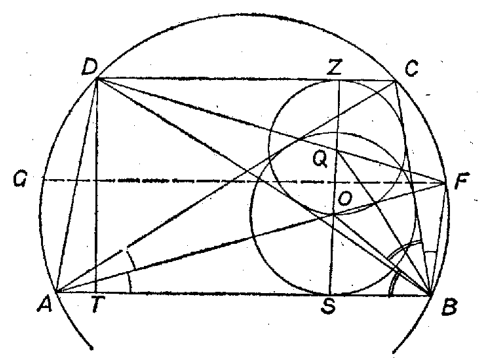
Itt az utolsó előtti tag egyenlő az utolsóval, a többi pedig nagyobb nála, mert ha $l > 1$,

$$(2n+1)^l + (2n-1)^l - 2(2n)^l = (2n+1)^l - (2n)^l - [(2n)^l - (2n-1)^l] =$$
$$= (2n+1)^{l-1} - (2n-1)^{l-1} + (2n)[(2n+1)^{l-2} - (2n-1)^{l-2} + \ldots +$$
$$+(2n)^{l-2} \cdot [(2n+1) - (2n-1)] > 0.$$

Az n tag összege tehát nagyobb, mint $n \cdot 2(2n)^{n-1} = (2n)^n$.

2. feladat. *Legyen adva egy egyenlő szárú trapéz. Tekintsük azt a két háromszöget, melyek közös oldala a trapéz egyik szára, harmadik csúcsaik a másik szár végpontjai. – Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög beirt körének középpontját összekötő egyenes merőleges a trapéz párhuzamos oldalaira.*

I. megoldás. Legyen az adott egyenlő szárú trapéz $ABCD$, ahol a csúcsokat úgy betűztük, hogy $AB \| CD$ és $AB \geq CD$ álljon. Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör középpontját O-val, a BCD háromszögbe írtét Q-val, az előbbi kör érintési pontját AB-n S-sel, az utóbbiét CD-n Z-vel. A feladat állítása igazolást nyer azzal, ha megmutatjuk, hogy SZ merőleges a párhuzamos oldalakra, hiszen O az AB-re S-ben emelt merőlegesen van, Q pedig a CD-re Z-ben állított merőlegesen. D vetületét AB-n T-vel jelölve azt mutatjuk meg, hogy $DTSZ$ téglalap. Ehhez elég megmutatni, hogy $DZ = TS$, hiszen ez a két oldal párhuzamos és merőleges DT-re.



A háromszög csúcsainak a beírt kör érintési pontjától való távolsága és az oldalak hossza közti ismert összefüggés szerint

$$AS = \frac{1}{2}(AB + AC - BC), \qquad DZ = \frac{1}{2}(DC + DB - BC).$$

A T pont az AB szakaszon van (esetleg egybeesik A-val), így a TS szakasz, figyelembe véve, hogy az átlók egyenlők,

$$TS = AS - AT =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + DB - BC) - \frac{1}{2}(AB - CD) =$$
$$= \frac{1}{2}(DB + CD - BC) = DZ,$$

$DTSZ$ tehát valóban téglalap. (Nem lehet, hogy O és Q egybeessék, s így a rajtuk átmenő egyenes iránya határozatlan, mert akkor a körök is egybeesnének, hiszen mindkettő érinti BC-t; de pl. az ABC háromszögbe írt kör nem érintheti CD-t, mert CD-nek C az egyetlen közös pontja a háromszöggel, az pedig a körön kívül van.

Megjegyzés. Hasonlóan lehet belátni, hogy a BCA és BOD háromszög külső érintő köreinek középpontjai – alkalmas páronként összekötve – ugyancsak az AB-re merőleges egyeneseket adnak.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. A trapéz köré kör írható. Legyen a kör A-t (és D-t) nem tartalmazó BC ívének felezőpontja F. Megmutatjuk, hogy az OFQ háromszög egyenlő szárú és OQ-ra merőleges szimmetriatengelye párhuzamos a trapéz párhuzamos oldalaival. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

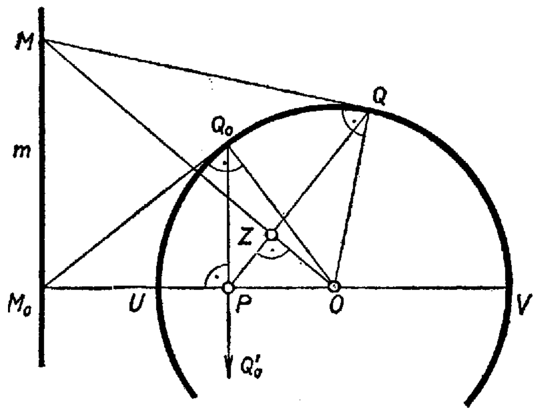
Az állítás első része abból következik, hogy OFB és QFB egyenlő szárú háromszögek. AO és BO szögfelezők, és előbbi átmegy F-en. Így, felhasználva a külső szög és a kerületi szög tételét:

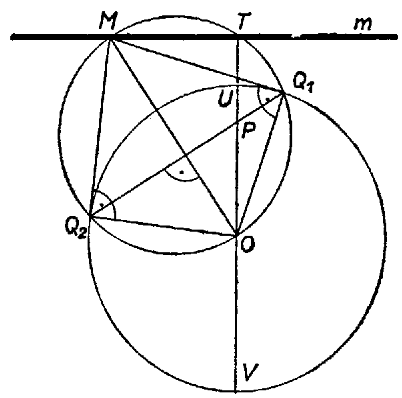
$$FOB\sphericalangle = FAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle = FAC\sphericalangle + OBC\sphericalangle =$$
$$= FBC\sphericalangle + CBO\sphericalangle = FBO\sphericalangle.$$

Hasonlóan látható a QFB háromszög egyenlő szárú volta is. A kettőből $OF = BF = QF$, tehát OFQ is egyenlő szárú háromszög. Szimmetriatengelye az $OFQ\sphericalangle = AFD\sphericalangle$ felezője, átmegy a B-t nem tartalmazó AD ív G felezőpontján.

Ez az F pont tükörképe a trapéz szimmetriatengelyére, így FG valóban párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, OQ tehát merőleges rájuk.

3. feladat. *Adott egy kör és a kör belsejében fekvő P pont. Legyen a körvonal tetszőleges pontja Q és a Q pontbeli érintője e. Jelöljük a kör középpontjából a PQ-ra emelt merőleges és e egyenes metszéspontját M-mel. – Mi az M pontok mértani helye, ha Q végigfut a kör kerületén?*





I. megoldás. Csak a kör O középpontjától különböző P pontok esetével kell foglalkoznunk, mert ha P egybeesik O-val, akkor Q semmilyen helyzetében nem jön létre az M metszéspont. Nem jön létre az M pont akkor sem, ha P különbözik O-tól, de Q a körből OP-vel kimetszett UV átmérő bármelyik végpontjában van.

Megszerkesztve M-et Q néhány helyzetéhez, a kapott pontok egy egyenesbe esnek, amely merőleges OP-re. Megmutatjuk, hogy a mértani hely valóban egyenes.

A mértani helynek van pontja az OP egyenesen. Akkor kapjuk ezt, amikor az O-n át PQ-ra állított merőleges maga OP, vagyis amikor PQ merőleges OP-re, más szóval Q a kör P-n átmenő, OP-re merőleges Q_0Q_0' húrjának valamelyik végpontjában van. Legyen a Q_0-hoz és Q_0'-höz tartozó pont M_0. Ekkor az OQ_0M_0 és OPQ_0 derékszögű háromszögek hasonlók, mert O-nál levő szögük közös, így

$$M_0O : Q_0O = Q_0O : PO, \qquad M_0O \cdot PO = Q_0O^2.$$

(2)

M_0 az OP félegyenesen van.

Legyen a körnek egy az U, V, Q_0, Q_0' pontoktól különböző pontja Q, és messe OM a PQ egyenest Z-ben. Az OQM és OZQ háromszögekből az előbbiekhez hasonlóan, majd felhasználva (2)-t

$$MO \cdot ZO = QO^2 = Q_0O^2 = M_0O \cdot PO, \quad \text{tehát}$$
$$MO : M_0O = PO : ZO.$$

A két egyenlő arány tagjai az MM_0O és PZO háromszögek O-ból kiinduló oldalai. E háromszögek O-nál levő szöge közös, így hasonlók, ezért $MM_0O\sphericalangle = PZO\sphericalangle = 90°$. Ezzel beláttuk, hogy M valóban mindig az M_0-ban OM_0-ra, vagyis OP-re merőlegesen álló m egyenesen van.

m minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Láttuk ugyanis, hogy M_0 a kört befutó pont Q_0 és Q_0' helyzeteihez tartozik hozzá. Legyen m-nek egy az M_0-tól különböző pontja M^*, és az M^*-ból a körhöz húzott egyik érintő érintési pontja Q^*. Ez csak M^*-ot szolgáltathatja, mert U-tól és V-től különbözik, m-en levő pontot szolgáltat, de a Q^*-ban húzott érintő egyetlen közös pontja m-mel M^*, tehát M^* valóban hozzátartozik a mértani helyhez.

Mindezek szerint a keresett mértani hely az OP félegyenesre a (2)-nek eleget tevő M_0 pontjában állított merőleges.

II. megoldás. P-n át tetszés szerinti, de O-n át nem menő egyenest húzva, ennek a körrel való Q_1, Q_2 metszéspontjaihoz közös M pont tartozik. Ugyanis M-mel a Q_1-beli és Q_2-beli érintők metszéspontját jelölve az MQ_1OQ_2 négyszög deltoid, mert O-ból kiinduló oldalai, valamint a végpontjaiknál levő szögek egyenlők, tehát MO átlója merőleges a Q_1Q_2 átlóra. Ez pedig azonos a PQ_1, PQ_2 egyenessel, tehát az előírás szerint Q_1-hez és Q_2-höz M tartozik hozzá.

A deltoid köré kör írható, mert a szemben fekvő Q_1, Q_2 csúcsainál levő szögek összege két derékszöggel egyenlő, így MO e körben átmérő. Messe ez a kör az OP egyenest másodszor T-ben, így Thalész tétele szerint az OTM szög derékszög.

Könnyű belátni, hogy T helyzete független a Q_1Q_2 egyenes megválasztásától. A deltoid köré írt körnek TO és Q_1Q_2 a P-n átmenő húrjai, így

$$PT \cdot PO = PQ_1 \cdot PQ_2.$$

Hasonlóan az adott körből
$$PQ_1 \cdot PQ_2 = PU \cdot PV,$$
ahol U, V ismét az adott körnek PO-n levő pontjai, így
$$PT \cdot PO = PU \cdot PV.$$
Itt PO, PU és PV állandó, tehát PT is állandó, amint állítottuk.

Ezek szerint M mindig az OP egyenesre az állandó T pontban állított m merőlegesen van.

Eredményünk alapján m az M egyetlen helyzetéből megszerkeszthető. Ha pl. a P-n át választott egyenes merőleges OP-re, akkor M az OP-n, tehát éppen T-ben adódik.

Az I. megoldáshoz hasonlóan látható be, hogy m minden pontja a mozgó pont egy helyzetéhez tartozik, m a keresett mértani hely.

Lőrincz Pál, Surányi János