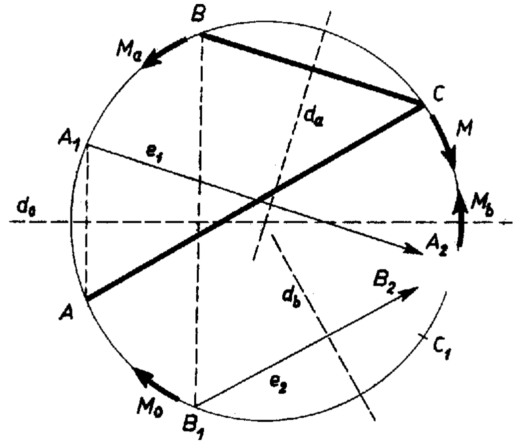
1. feladat. *Egy kör kerületének három pontja A, B, C. Ezeknek a kör egy átmérőjére vonatkozó tükörképe sorban A_1, B_1, C_1. Húzzunk párhuzamost A_1-en át BC-vel, B_1-en át AC-vel, C_1-en át AB-vel. Bizonyítsuk be, hogy a kapott három egyenes egy ponton megy át.*



1. ábra

I. megoldás. Vázlatot készítve azt találjuk, hogy a kérdéses metszéspont a körön van. Könnyebb lesz ezt a többet mondó állítást bebizonyítani.

Mivel átmérőre tükröztünk, A_1, B_1 és C_1 is a körön van. Azt fogjuk megmutatni, hogy az A_1-en át BC-vel és a B_1-en át AC-vel párhuzamosan húzott e_1, illetőleg e_2 egyenes a körön metszi egymást. A harmadik egyenesre már könnyen átvihető lesz eredményünk.

Messe az e_1 egyenes a kört másodszor A_2-ben, az e_2 egyenes B_2-ben, így azt akarjuk belátni, hogy A_2 azonos B_2-vel. Egyelőre feltesszük, hogy A_1 és A_2 különböző pontok, úgyszintén B_1 és B_2 is (1. ábra).

A BC és A_1A_2 szakaszok a kör párhuzamos húrjai, ezért végpontjaik egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) csúcsai, páronként egymás tükörképei a mindkét húrra merőlegesen álló d_a átmérőre mint tengelyre nézve. Így a CA_2 és BA_1 húrok egyenlők, mert egymás d_a-ra vonatkozó tükörképei.

Hasonlóan egy húrtrapéz csúcsai az A, A_1, B és B_1 pontok – az először végzett tükrözések miatt, mert AA_1 és BB_1 merőlegesek a felhasznált d_0 átmérőre –, valamint A, C, B_1 és B_2 is, a másodszorra szerkesztett párhuzamos miatt, itt a szimmetriatengely az AC-re merőleges d_b átmérő. Ezért

$$BA_1 = B_1A = B_2C \quad \text{és így} \quad CA_2 = B_2C \tag{1}$$

Eszerint A_2 és B_2 a körnek C-től egyenlő távolságra levő pontjai, tehát vagy egymás tükörképei a C-ből kiinduló átmérőre nézve, vagy egybeesnek. Csak azt kell már belátnunk, hogy az utóbbi eset áll fenn.

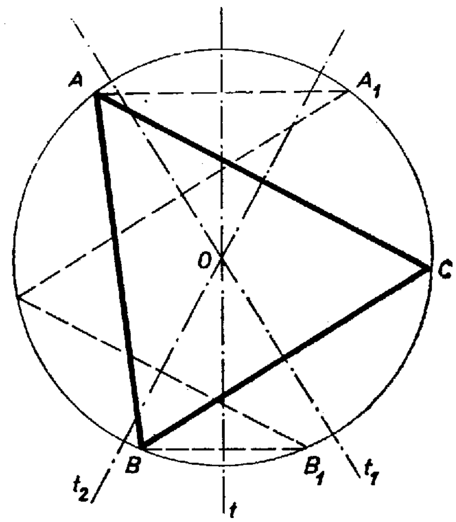
Mozgassunk egy M pontot a körön C-ből A_2-be a köztük levő két körív valamelyikén, és tekintsük azt a mozgást, amit M-nek d_a-ra való M_a tükörképe végez, továbbá M_a-nak d_0-ra való M_0 tükörképe, végül amit M_0-nak d_b-re való M_b tükörképe végez. Az (1) alatti egyenlő húrok mindegyikének végpontjai a kört úgy osztják két-két ívre, hogy a részívek páronként egyenlők, és az M, M_a, M_0, M_b pontok az egyenlő hosszú íveket írják le. A pontok mozgása mindig a kör középpontja körüli forgás, amelynek iránya az egymás utáni párokban a tükrözés miatt ellentétes. Így M és M_0 forgási iránya megegyező, mert mindegyik ellentétes irányú M_a forgásával, és hasonlóan M_b iránya is ellentétes M-ével. Ezért az M és M_b által befutott CA_2 és B_2C ívek ellentétes irányúak, az utóbbinak a végpontja viszont azonos az előbbinek a kezdőpontjával, ezért a B_2 kezdőpont is azonos az A_2 végponttal. Ezt akartuk belátni.

Akkor is érvényes (1), valamint meggondolásunk záró része is, ha e_1 érinti a kört. Ekkor ugyanis A_2 helyén csak maga A_1 vehető, másrészt az A_1-ből kiinduló átmérő merőleges BC-re, az A_1BC háromszög egyenlő szárú, és így $CA_2 = CA_1 = BA_1$. Hasonlóan okoskodunk, ha e_2 érinti a kört. Ezzel az első két párhuzamosra vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

Meggondolásunkban az A, B, C; A_1, B_1; A_2, B_2 pontok szerepét rendre a B, C, A, B_1, C_1, B_2, C_2 pontoknak adva át, úgyszintén e_1, e_2, d_a, d_b, M_a, M_b szerepét rendre e_2, e_3, d_b, d_c, M_b, M_c-nek – ahol C_2-t, e_3-at, d_c-t és M_c-t a fentiekhez hasonlóan értelmezzük –, azt kapjuk, hogy e_2 és e_3 a körön metszik egymást, C_2 egybeesik B_2-vel, tehát az eredeti meggondolás szerint A_2-vel is. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzés. M és tükörképei mozgásának elképzelése tulajdonképpen mellőzhetővé tette az (1)-re vezető meggondolást, hiszen megismételte azt, de többet mondott nála. Az ábra azonban csak nyugalmi helyzetet mutat, szemlélete előkészítette a később mondottakat.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy a feladatban szereplő egyenesek a körön metszik egymást. Elég megmutatni, hogy az A_1-en át BC-vel és B_1-en át AC-vel húzott párhuzamosok a körön metszik egymást. A feltételeket leírhatjuk csupán a kör O középpontján átmenő tengelyekre való tükrözésekkel.



2. ábra

Jelöljük a körnek a feladat szövegében említett átmérőjét t-vel, a BC-re és a CA-ra merőleges átmérőt t_1-gyel, ill. t_2-vel (2. ábra). Ekkor A-ból a kérdéses körpontba úgy juthatunk, hogy A-t tükrözzük t-re, majd a tükörkép-pontot (A_1-et) t_1-re; hasonlóan B-ből a megfelelő metszéspontba a t-re, majd t_2-re való tükrözéssel juthatunk. Megfordítva, a kétszeri tükrözéssel kapott pontból B-be a t_2-re, majd t-re való tükrözéssel jutunk – és csak ebből a pontból, hiszen B_1 az egyetlen pont, amelyet t-re tükrözve B-t kapjuk, és olyan pont is egyetlenegy van, amelynek t_2-re vonatkozó tükörképe B_1, ugyanis B_1-nek a t_2-re vonatkozó tükörképe. Így, ha állításunk igaz, akkor A-t sorra tükrözve t-re, t_1-re, t_2-re, majd újra t-re, B-be jutunk, de fordítva is, ha utolsó állításunk igaz, akkor A-t t-re, majd t_1-re tükrözve ugyanazt a pontot kapjuk, mint ha B-t tükrözzük t-re, majd t_2-re.

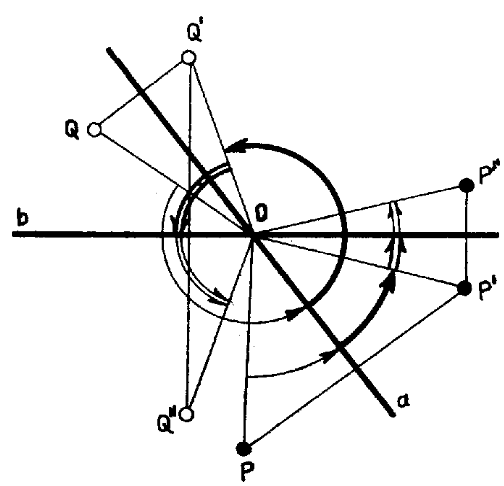
Elég tehát azt megmutatni, hogy A a fent említett négy tükrözéssel B-be megy át.

Ehhez megmutatjuk, hogy két egymást metsző tengelyre történő, egymás utáni tükrözés eredménye ugyanaz, mint ha metszéspontjuk körül egy kétszer akkora forgatást végzünk, mint ami az első tükrözés tengelyét a másodikéba viszi át.

Ebből átfogalmazott állításunk helyessége következik, hiszen A-t a t, majd. a t_1 tengelyre tükrözve az eredmény a kör O középpontja körül a t-t t_1-be vivő forgás kétszeresével való elforgatással helyettesíthető. Az ez utáni tükrözés t_2-re, majd t-re annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amely t_2-t t-be viszi át. A két forgatást egymás után elvégezve a forgatások szögei összeadódnak, és ez a forgásszög-összeg független a forgatások sorrendjétől. Így a négy tükrözés együtt annak a forgatásnak a kétszeresét adja, amellyel t_2, a t-be, majd innen t_1-be forgatható. Az utoljára említett forgatás a t_2-t t_1-be vivő forgatás, vagy ennél 180° egy többszörösével nagyobb. Így kétszerese a t_2-t t_1-be vivő forgatás kétszeresétől csak 360° egy többszörösével különbözhet, azonban 360° egy többszörösével való forgatás minden pontot önmagába visz át.

A négy egymás utáni tükrözés eredménye tehát az O körül a t_2-t t_1-be vivő forgatás kétszerese, ez pedig A-t éppen B-be viszi át; ezt akartuk bizonyítani.

A két tükrözés összetételére vonatkozó állítást kell tehát még belátnunk. Legyen a két egymást metsző tükörtengely a és b, metszéspontjuk O.



3. ábra

Egy P pont a-ra vonatkozó tükörképét megkaphatjuk úgy is, hogy az OP szakaszt O körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban – ezt szokás pozitív forgásiránynak tekinteni – a-ig forgatjuk, majd innen ugyanekkora szöggel tovább. az OP' helyzetbe. Ekkor P' a P tükörképe a-ra (3. ábra). A P-t P'-be vivő forgás szöge függ P helyzetétől. P'-t a b-re vonatkozó P'' tükörképébe ismét átvihetjük úgy, hogy OP'-t pozitív irányban b-ig forgatjuk, majd innen még ugyanekkora szöggel továbbforgatva jutunk az OP'' szakaszhoz. Így végül OP-t annak a forgásnak a kétszeresével forgattuk el (a 3. ábra vastagabban jelölt ívei), amely a-t P'-n áthaladva b-be viszi át. Ez vagy az a-t pozitív irányban b-be vivő legkisebb forgás, vagy az annál $180°$-kal nagyobb forgás kétszerese; eredménye tehát minden esetben ugyanaz, mint az a-t b-be vivő forgatás kétszereséé, mért a $360°$-kal való továbbforgatás nem okoz változást. Ezzel segédtételünket, s így a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Itt nem kellett különválasztanunk azt az esetet, ha pl. az A_1-en át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes érinti a kört. Ekkor t_1 átmegy A_1-en, s így a rá való tükrözés A_1-et helyben hagyja.

2. Meggondolásunkban felhasználtuk, hogy egy középpont körüli egymás utáni forgatások felcserélhetők, így segédtételünk értelmében egy ponton átmenő tengelyekre vonatkozó tükrözéspárok is felcserélhetők. (Tükrözések nem cserélhetők fel, hiszen a b-re, majd a-ra való tükrözés azt a forgást adja, ami az a-ra, majd b-re való tükrözéssel egyenértékű forgatást teljes körülforgássá egészíti ki.) Így a t-re, t_1-re, t_2-re, majd t-re vonatkozó tükrözés ugyanazt eredményezi, mint ha t_2-re, t-re, újra t-re, majd t_1-re tükrözünk. Azonban a t-re való kétszeri tükrözés minden pontot helyben hagy, tehát az eredmény ugyanaz, mint ha t_2-re, majd t_1-re tükrözünk. Lényegében ezt láttuk be a megoldás során geometriailag.

3. A bizonyítandó állítást tovább alakíthatjuk, megfigyelve, hogy B-t ismét t_1-re, majd t_2-re tükrözve C-be, majd A-ba jut, és B az egyetlen pont, aminek megvan ez a tulajdonsága. Elég tehát azt megmutatni, hogy A-t sorra a t, t_1, t_2, t, t_1, t_2 tengelyekre tükrözve eredeti helyzetébe jut vissza. Ez azonnal látható, ha – előző megjegyzésünk értelmében – az első és második tükrözéspárt megcseréljük. Eszerint a hat tükrözés eredménye ugyanaz, mintha A-t sorra a t_2, t, t, t_1, t_1, t_2 tengelyekre tükrözzük. De a t-re és újra t-re való tükrözés helyben hagyást eredményez, úgyszintén a t_1-re és ismét t_1-re való tükrözés, tehát a hat tükrözés egymásutánja ugyanazt eredményezi, mint a t_2-re, majd t_2-re való tükrözés, vagyis a helyben hagyást.

4. Az előző átfogalmazás azt jelenti, hogy a t, t_1, t_2 tengelyekre való tükrözések egymásutánja olyan transzformációt eredményez, amelyet kétszer egymásután alkalmazva minden pont eredeti helyzetébe kerül vissza. Valóban, a három tükrözés eredménye egyetlen tükrözéssel helyettesíthető. A t-re és t_1-re való tükrözés ugyanis annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amelyik t-t pozitív irányban t_1-be viszi át. Ugyanerre a forgatásra vezet azonban minden olyan O-n átmenő tengelypárra vonatkozó tükrözés is, amelyek elsőjét a másodikba ugyanakkora forgás viszi át, mint t-t t_1-be. Legyen t^* az a tengely, amelyet t_2-be ugyanaz a forgatás viszi át, mint t-t t_1-be. Ekkor a t-re, t_1-re, majd t_2-re való tükrözés eredménye ugyanaz, mint a t^*-ra, t_2-re, majd t_2-re való tükrözésé, ezé pedig ugyanaz, mint a t^*-ra való tükrözésé. Ezzel állításunkat igazoltuk.

2. feladat. *István két* 5000 Ft-*os gépkocsi nyereménybetétkönyvet váltott. A sorsolási negyedév* 20. *napján igy szólt Kálmánhoz: „Vedd át az egyik könyvemet. Ha nyerünk, a nyeremény árán mint kamaton elosztozunk, betéteink és az eltelt idő arányában." Kálmán másnap* 4000 Ft-*ot adott át neki. – Egy hónappal később István ugyanezzel a feltétellel Lászlótól* 2500 Ft-*ot vett fel. – Kálmán ugyanekkor azt mondta Miklósnak: „Adj nekem* 2000 Ft-*ot.* 4000 Ft-*om van közös gépkocsi nyereménybetétkönyvön. Ha kihúzzák, a részemet megfelezzük, mintha velem egyszerre léptél volna be, " Miklós elfogadta az ajánlatot.*

A negyedévi húzáson mindkét könyv nyert, az egyik autót 60 000 Ft-*ra becsülték, a másikat* 48 000 Ft-*ra. Az osztozásnál István az első autót meg akarta tartani. A többiek tudomásul vették, hogy a másik autó árán osztoznak. Miklós csak ekkor tudta meg, hogy Kálmán betétje nem a teljes negyedévben volt benn, és emiatt nyereményük kisebb lesz. Kárpótlásul Kálmán vállalta, hogy Miklós részét az övé terhére úgy számítsák, mintha Miklós pénze a negyedév elejétől lett volna a betétben.*

A második autó eladása után azonban csak 42 000 Ft *maradt felosztásra. Mennyit kapott ebből a négy résztvevő?*

Megoldás. I. A nyereményt először István, Kálmán és László között kell felosztanunk, hiszen Kálmán Miklóssal csak a maga remélt nyereményhányadára kötött megállapodást.

A becslés szerint 108 000 Ft értékű nyeremény a megegyezések szerint a betétben volt 10 000 Ft negyedévi, azaz 90 napi kamata, ezért belőle mindegyiküknek minden egyes betett forintjára minden betéti napra 12 fillér jut.

Istvánnak az első 20 napon át 10 000 Ft-ja volt a betétben, a következő 30 napon át 6000 Ft-ja, a hátra levő 40 napon át pedig 3500 Ft-ja, így neki

$$20 \cdot 10\ 000 + 30 \cdot 6000 + 40 \cdot 3500 = 520\ 000 - \text{szer } 0,12 \text{ Ft},$$

azaz 62 400 Ft jár. Hasonlóan

Kálmán része $70 \cdot 4000 \cdot 0,12 = 33\ 600$ Ft,
László része $40 \cdot 2500 \cdot 0,12 = 12\ 000$ Ft.

Ezt bizonyára a fiúk is kiszámították, mielőtt elfogadták, hogy István megtartsa az értékesebb autót. Így azt is elfogadták, hogy Istvánnak még 2400 Ft jár a második autó várt eladási árából.

II. Miklós 2000 Ft-ja után Kálmán kijelentése szerint 90 napra jár a kamat, ez $90 \cdot 2000 \cdot 0,12 = 21\ 600$ Ft, igy Kálmánnak 12 000 Ft marad.

III. Minthogy a felosztandó összeg 1/8 résszel kisebbnek adódott a becsértéknél, mindegyik résztvevő megállapított részét 1/8 résszel csökkentették, István 2100 Ft-ot kapott, Kálmán és László fejenként 10 500-at, Miklós pedig 18 900 Ft-ot.

Megjegyzés. Sok versenyző többféleképpen is próbálta értelmezni, illetőleg kissé megváltoztatni a feladatot. A felosztásban azonban csak azt szabad tekintetbe venni, amiben a résztvevők megállapodtak, akár páronként, akár együttesen. Ide értendő a becsértékek megállapítása, a szó szerinti osztozásnak a 2. autó árára való korlátozása, valamint Kálmán egyoldalú kijelentése is, mert Miklós nem tett ellenvetést.

3. feladat. *Egy matematikai versenyen 5 feladatot tűztek ki. A versenyzők között nem volt két olyan, aki pontosan ugyanazokat a feladatokat oldotta volna meg. Ha azonban a feladatok közül bármelyiket figyelmen kívül hagyjuk, akkor bármelyik versenyzőhöz található olyan másik versenyző, aki a megmaradó 4 feladat közül ugyanazokat oldotta meg. Hányan vettek részt a versenyen?*

Bár a szöveg ezt nem állítja, feltesszük, hogy volt versenyző.[1]

I. megoldás. Bármelyik feladatot figyelmen kívül hagyva mindegyik versenyzőhöz csak egy olyan másik versenyző van, aki a maradó négy feladatban ugyanazt az eredményt érte el, mint ő. Ha ugyanis volna kettő, akkor hármuk közt vagy volna kettő, aki a figyelmen kívül hagyott feladatot megoldotta, vagy kettő, aki nem oldotta meg, de akkor ők ketten mind az 5 feladat közül ugyanazokat oldották volna meg (esetleg egyet sem), ez pedig a feltétel szerint nem teljesül.

Az 1. feladatot figyelmen kívül hagyva párokba állíthatjuk a versenyzőket úgy, hogy a párok a maradó 4 feladat közül ugyanazokat oldották meg, az 1.-t pedig egyikük megoldotta, másikuk nem. Így a versenyzők száma kétszerese az első feladatot megoldók számának.

Ha most a 2. feladatot hagyva figyelmen kívül alakítunk párokat, akkor egy az első feladatot megoldó versenyző párja is megoldotta az 1. feladatot, hiszen a 2. feladattól eltekintve azonos eredményt értek el; a 2. feladatot viszont egyikük megoldotta, a másikuk nem . Így az 1. feladatot megoldó versenyzők száma 2-szerese, az összes versenyzőké tehát 4-szerese az 1. és 2. feladatot megoldók számának. Hasonlóan a 3. feladat szerint állítva párokba, egy tanulónak, aki az első két feladatot megoldotta, a párja is megoldotta az első két feladatot, a 3. feladatot pedig egyikük oldotta csak meg, így az első két feladatot megoldókat külön állítottuk párokba, számuk kétszer akkora, az összes versenyzőké tehát 8-szor akkora, mint az első három feladatot megoldók száma. Ugyanígy látható, hogy 16-szor annyi versenyző volt, mint ahányan az első négy feladatot megoldották, és 32-szer annyi, mint amennyi mind az 5 feladatot megoldotta. Ilyen versenyző azonban legfeljebb egy volt, és ha feltettük, hogy volt versenyző, akkor egynek kellett is lennie. Így összesen 32 versenyző volt.

II. megoldás. Egy feladat megoldását jelöljük 1-gyel, a meg nem oldását 0-val. Minden versenyző eredményét írjuk fel ilyen módon, a feladatok eredményét a kitűzés sorrendjében tüntetve fel, tehát pl. 10110 azt jelöli, hogy a megfelelő versenyző a 2. és 5. kivételével megoldotta a feladatokat. Számoljuk össze a lehetőségek számát. Az első helyen 0 vagy 1 áll, mindegyik mellett állhat a második helyen 0 vagy 1, tehát az első két helyet 4-féleképpen tölthetjük ki. A harmadik helyet ismét 2-féleképpen tölthetjük ki, és minden újabb feladat figyelembevételével megkétszereződik a lehetséges eredmények száma. Így az öt feladat megoldásában $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$-féle eredmény lehetséges, ennél több versenyző sem lehetett tehát, mert az első feltétel szerint nem volt két versenyző, aki pontosan ugyanazokat a feladatokat oldotta volna meg.

Megmutatjuk, hogy ha feltesszük, hogy volt versenyző, akkor 32-nek kellett lennie, tehát minden eredménynek elő kellett fordulnia. Válasszunk ki egy versenyzőt, A-t, jelezze az eredményét az $abcde$ jegysorozat (mindegyik betű 0-t vagy 1-et jelent). Aki például az 1. feladatban tőle különböző eredményt ért el, annak az eredménytáblája $1-a$-val kezdődik, ezt rövidebben $\overline{a}$-sal fogjuk jelölni.[2] Ekkor minden lehetséges eredmény előáll úgy, hogy az a, b, c, d, e számok közül egyeseket (esetleg egyet sem, vagy mindet is) föléhúzunk, hiszen egy betű és a fölülhúzottja közül az egyik 0, a másik 1. Azt kell tehát belátnunk, hogy minden ilyen módon jelzett eredmény elő is fordul. Eljárást adunk meg, amivel minden eredményhez megtalálhatjuk az éppen azt az eredményt elért versenyzőt. Ezt az $\overline{a}b\overline{c}\overline{d}\overline{e}$ példáján mutatjuk be: A-hoz található olyan B versenyző, akinek az eredménye A-étól csak az 1. feladatban különbözik, tehát B eredménye $\overline{a}bcde$ A B-től csak a 3. feladatban eltérő versenyző, C eredménye $\overline{a}b\overline{c}de$; az ettől csak a 4. feladatban eltérő D eredménye $\overline{a}b\overline{c}\overline{d}e$, végül azé az E versenyzőé, akinek az eredménye D-étől csak az 5. feladatban különbözik, $\overline{a}b\overline{c}\overline{d}\overline{e}$. E tehát a keresett versenyző. B, C, D, E a feladat második feltétele szerint rendre létezik. Hasonlóan látható be bármelyik eredményről, hogy előfordul a versenyzők közt, tehát 32 versenyző vett részt a versenyen.

Fried Ervin, Surányi János

[1] A feladat szövege szerint megoldás az is, hogy egy versenyző sem indult, hiszen akkor sem volt két olyan versenyző, aki pontosan ugyanazokat a feladatokat oldotta meg, a másik feltétel pedig csak akkor nem teljesül, ha találunk egy versenyzőt és egy feladatot, hogy a feladatot figyelmen kívül hagyva is a versenyző a többi négy feladatban mindenki mástól különböző eredményt ért el. Ha azonban nincs versenyző, akkor ilyen versenyzőt nem találunk.

[2] Olvasd: á fölül vonás.