1. feladat. *Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést:*

$$[(a-c)^2+(b-d)^2]\cdot(a^2+b^2)-(ad-bc)^2. \tag{*}$$

Megoldás. Jelöljük az átalakítandó kifejezést K-val. A kéttagúak négyzeteit tagokra bontva és részben beszorozva:

$$\begin{gathered}K=[a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)](a^2+b^2)-a^2d^2-b^2c^2+2abcd=\\=(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)(a^2+b^2)-2(ac+bd)(a^2+b^2)-\\-a^2d^2-b^2c^2+1abcd.\end{gathered}$$

A második szorzatot tagokra bontva összevonások után a szorzatból két tag marad, amelyek az utolsó taggal együtt teljes négyzetet alkotnak: $a^2c^2+b^2d^2+2abcd=(ac+bd)^2$. Így K is teljes négyzet:

$$K=(a^2+b^2)^2+(ad+bc)^2-2(ac+bd)(a^2+b^2)=[a^2+b^2-(ad+bc)]^2.$$

Ezzel K-t két (egyenlő) tényező szorzatává alakítottuk.

2. feladat. *Legyen az N szám nagyobb, mint a jegyeinek fordított sorrendben való leírásával keletkező F szám. Bizonyítandó, hogy*

$$\sqrt{N}<N-F. \tag{1}$$

Megoldás. Ha az N számban a számjegyek száma páros, akkor a feladat állítására találhatók ellenpéldák, pl.

$$\sqrt{87}>87-78=9,\qquad \sqrt{8108}>8108-8018=90.$$

Páratlan számú számjeggyel írt N számokra viszont az állítás igaz, először ezt bizonyítjuk be; majd a páros esetben meghatározzuk azokat a számokat, amelyekre az állítás nem érvényes.[1]

I. Legyen N jegyeinek száma $2k+1$. Ekkor N kisebb a legkisebb $2k+2$ jegyű számnál, ami 10^{2k+1} ezért

$$\sqrt{N}<\sqrt{10^{2k+1}}=10^k\cdot\sqrt{10}<4\cdot 10^k. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy $N-F$ semmilyen megengedett N-re nem kisebb a négyzetgyökre itt talált felső korlátnál.

Az N szám balról számított $k+1$-edik számjegyének jobbról számított sorszáma is $k+1$, így ennek a jegynek a helyi értéke F-ben ugyanannyi lesz, mint volt N-ben, ti. 10^k. Jelöljük ezt a számjegyet j-vel, az N-ben az első k számú jeggyel, illetőleg az utolsó k számú jeggyel írt számot pedig N_1-gyel, illetőleg N_2-vel. N_1 utolsó számjegyének helyi értéke az N-ben 10^{k+1}, ezért

$$N=N_1\cdot 10^{k+1}+j\cdot 10^k+N_2.$$

(N_1 valódi k-jegyű szám, vagyis balról első számjegye nem kisebb 1-nél, N_2 azonban kezdődhet helypótló 0-val is.) Legyen az N_1, N_2 szám jegyeinek fordított sorrendben való írásával előálló k-jegyű szám F_1, illetőleg F_2 (mindkettő kezdődhet helypótló 0-val), így

$$\begin{gathered}F=F_2\cdot 10^{k+1}+j\cdot 10^k+F_1,\ \text{tehát}\\ N-F=(N_1-F_2)\cdot 10^{k+1}-(F_1-N_2)\end{gathered} \tag{3}$$

N_1 és F_2 különbözők, mert különben N számjegysorozata szimmetrikus volna j-re, s ezért $N=F$ állna. Így $N>F$ miatt $N_1-F_2\geqq 1$. Másrészt a kivonandó nem nagyobb a k számú 9-essel írott számnál, 10^k-1-nél, így (2)-t is tekintetbe véve

$$N-F>1\cdot 10^{k+1}-10^k=9\cdot 10^k>4\cdot 10^k>\sqrt{N}.$$

Ezzel a feladat állítását a páratlan számú jeggyel írt természetes számokra bebizonyítottuk.

II. Ha N számjegyeinek száma $2k$, akkor $N<10^{2k}$, és így

$$\sqrt{N}<10^k. \tag{4}$$

Ebben az esetben a fenti jelöléseket tovább használva

$$\begin{gathered}N=N_1\cdot 10^k+N_2,\qquad F=F_2\cdot 10^k+F_1,\\ N-F=(N_1-F_2)\cdot 10^k-(F_1-N_2),\end{gathered}$$

[1] Mint a versenyről kiadott jelentés közölte – lásd K. M. L. (31) 1965. 3. o. – a feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt az a megszorítás, hogy az állítás páratlan számú számjeggyel írt természetes számokra bizonyítandó. – *Szerk.*

és $N-F>0$ miatt ismét szükségképpen $N_1>F_2$. Továbbá a második zárójelbeli különbség most is kisebb 10^k-nál. Ezért

$$N-F>(N_1-F_2)\cdot 10^k-10^k,$$

és így $N_1-F_2\geqq 2$ esetén $N-F$ nagyobb a (4)-beli felső korlátnál, tehát az (1)-et nem teljesítő számban csak $N_1-F_2=1$ lehet, azaz $N_1=F_2+1$. Ha F_2 9-esre végződik, akkor N_1 0-ra, így F_1 első jegye 0, N_2-é 9, tehát ekkor is

$$N-F=10^k+(N_2-F_1)>10^k.$$

Így csak az lehetséges, hogy F_2 utolsó – s így N_2 első – jegye 1-gyel kisebb, mint N_1 utolsó, tehát F_1 első jegye, a többi jegyek N_1-ben és F_2-ben, tehát F_1-ben és N_2-ben is megegyeznek. Ekkor $F_1-N_2=10k^{k-1}$,

$$N-F=10^k-10^{k-1}=9\cdot 10^{k-1}.$$

Ezek szerint csak akkor állhat fenn (1) helyett $\sqrt{N}\geqq N-F$, ha (négyzetre emelve)

$$N>(N-F)^2=81\cdot 10^{2k-2}=8,1\cdot 10^{2k-1}. \tag{6}$$

Megállapításainkat összefoglalva $2k=2$ esetén (6) így alakul: $N\geqq 81$, vagyis első jegye 8 vagy 9, második jegye pedig a fentiek szerint 1-gyel kisebb; tehát 2 kétjegyű ellenpélda van: 87 és 98.

$2k\geqq 4$ esetén a $2k$-jegyű N szám akkor nem teljesíti (1)-et, ha középső két jegyével írt szám a

$$10,\ 21,\ 32,\ 43,\ 54,\ 65,\ 76,\ 87,\ 98$$

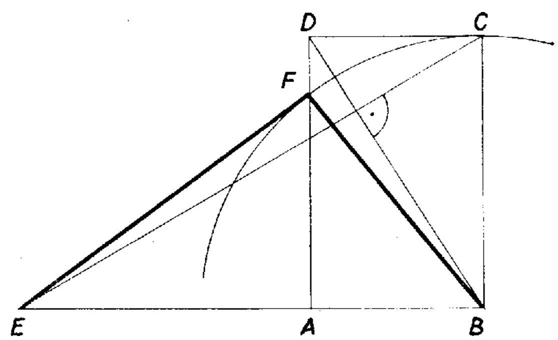
számok valamelyike, az ezt megelőző $k-1$ jegyű szám első két jegyével írt szám a

$$81,\ 82,\ \ldots,\ 89,\ 90,\ 91,\ \ldots,\ 99$$

számok valamelyike, további $k-3$ számjegye ($k\geqq 4$ esetén) tetszés szerinti, végül utolsó $k-1$ jegye fordított sorrendben rendre egyenlő az első $k-1$ jegyével.

$2k=4$ esetén a második számjegyre mindkét feltételnek teljesülnie kell, ezért az első két számjegy nem lehet 90, a 4-jegyű ellenpéldák száma 18. Hatjegyű ellenpélda $19\cdot 9=171$ van, $k\geqq 3$ esetén a $2k$ jegyű ellenpéldák száma $19\cdot 10^{k-3}\cdot 9=171\cdot 10^{k-3}$.

3. feladat. *Az $ABCD$ téglalap két rövidebb oldala AB és CD. Messe a C pontból a BD átlóra bocsátott merőleges egyenes az AB oldal meghosszabbítását az E pontban. Messe továbbá a B középpontú, BC sugarú kör a téglalap AD oldalát az F pontban. Bizonyítandó, hogy EF merőleges FB-re.*



Megoldás. A CEB és DBC háromszögek hasonlók, mert oldalaik páronként merőlegesek egymásra, ezért

$$EB=\frac{BC}{CD}\cdot CB.$$

Így EBF és FBA is hasonló háromszögek, mert B-nél levő szögük közös, és az ezt bezáró oldalak aránya az F-et előállító szerkesztés miatt egyenlő:

$$\frac{EB}{BF}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{CB}{BF}=\frac{BC}{CD}=\frac{FB}{BA}.$$

Az FBA háromszög A csúcsánál derékszög van, ezért a megfelelő BFE szög is derékszög. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A versenyzők egy része kifejezte FA-t, EA-t, majd EF-et is a téglalap oldalaival, és az

$$EB^2=EF^2+FB^2$$

összefüggésre jutott. Ebből a feladat állítása a Pythagoras-tétel megfordítása alapján következik.

Lőrincz Pál