Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 2. feladata így szólt:

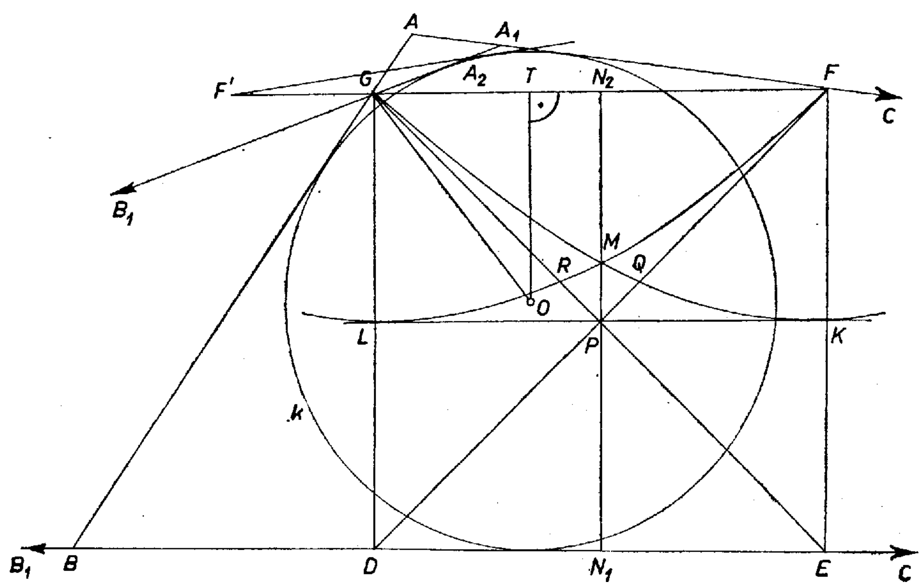
A hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.

A közölt megoldások[1] szerint a négyzet e pontot mindig belsejében tartalmazza, továbbá elég a négyzet és a háromszög közös oldalegyenesén fekvő csúcsokról kikötni, hogy hegyesszögűek legyenek.

Pelikán József versenydolgozatában felvetette azt a kérdést, hogy rögzítve a négyzetet és minden lehetséges módon köréírva hegyesszögű háromszögeket, ezek beírt köreinek középpontjai kerülhetnek-e a négyzet oldalaihoz tetszés szerint közel, vagy van olyan $\lambda > 0$, hogy ha a négyzet oldala t, akkor a körülírt háromszögek beírt köreinek középpontjai mindig legalább λt távolságra esnek a négyzet oldalaitól. Az alábbiakban meghatározzuk azon pontok mértani helyét a négyzetben, amelyek beírt körközéppontok lehetnek, és látni fogjuk, hogy ezek nem kerülhetnek tetszés szerint közel az oldalakhoz.

Legyen $DEFG$ a négyzet, ABC egy körülírt háromszöge, legyenek a B, D, E, C pontok ebben a sorrendben egy egyenesen, s legyen F, ill. G az AC, ill. AB szakaszon. Legyen az ABC háromszög beírt köre k, középpontja O.

I. Egyelőre nem kötjük ki, hogy a BAC szög hegyesszög legyen.



a) A k körnek metszenie kell az FG szakaszt; különben ugyanis átmérője legfeljebb DE lenne, ezért az EF, GD szakaszok közül legalább az egyiket, mondjuk EF-et nem metszené, s így teljes egészében az EFG szögtartományban volna, s így nem érinthetné az AC egyenest. Legyen EF és GD felezőpontja K, ill. L, akkor ezek szerint O a $KLGF$ téglalapba esik.

k nem tartalmazhatja belsejében a G pontot, mert G-ből érintő vonható hozzá. Így O legalább annyira van G-től, mint a DE egyenestől, tehát alatta van a G fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának. Hasonlóan O az F fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának is alatta van, legyen e két parabola metszéspontja M. Ekkor O az (egy egyenes szakasz és két parabolaív által határolt) KLM idomba esik; a KL szakasz pontjai nem tartoznak hozzá e mértani helyhez.

b) Ennek a tartománynak minden pontja lehet körközéppont. Valóban, legyen O ezen idom valamely pontja. Az O körül írt, DE-t érintő k kör nem tartalmazza F-et és G-t és metszi FG-t, így az F-ből, ill. G-ből k-hoz húzott, a négyzetet nem metsző érintők és DE egy olyan háromszöget határolnak, melynek a DE egyenesen levő csúcsaiban hegyesszögei vannak és melynek a k kör beírt köre, $DEFG$ beírt négyzete.

II. Kössük ki most még, hogy A-nál is hegyesszög van.

a) Az I.*a)* alatti megállapítások természetesen érvényben maradnak. Jelöljük $DEFG$ átlóinak metszéspontját P-vel. Megmutatjuk, hogy ekkor O csak a PFG háromszög belsejében lehet! Ebből következik, hogy ha az F fókuszú parabolának és a DF átlónak a négyzetbe eső metszéspontját Q-val, a G fókuszú paraboláét és EG-ét R-rel jelöljük, O a (két egyenesszakasz és két parabolaív által határolt) $PQMR$ idomba esik; a PQ, PR szakaszok pontjai nem tartoznak a mértani helyhez. Annak bizonyítását, hogy ezen idom minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, az olvasóra bízzuk.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy k középpontja pl. a PDG háromszögbe esik. Ekkor k nem metszi az EF egyenest, és ezért a CA oldalt az FA szakaszon érinti. A G pontból két érintőt húzhatunk k-hoz; az ezek által lemetszett háromszögek legyenek ABC és A_1B_1C. Feltehetjük, hogy a jelölést úgy választottuk, hogy k az A_1G, GB szakaszokat érinti. Be fogjuk látni, hogy a B_1A_1C és BAC szögek tompaszögek. A B_1A_1C szög a GAA_1 háromszög külső szöge, s így nagyobb a BAC szögnél.

[1] Lásd *Surányi János:* Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K.M.L. 31 (1965) 104–112. o., szorosabban 106–110. o.

Nyilvánvalóan $BGO\sphericalangle = A_1GO\sphericalangle$. Továbbá $DGO\sphericalangle \leq OGF\sphericalangle$, ezért $BGD\sphericalangle \geq FGA_1\sphericalangle$. Legyen O vetülete FG-re T, és F tükörképe T-re F', ez O elhelyezkedése miatt a négyzet oldalának meghosszabbításán fekszik. Messe az FA érintő OT-re vett tükörképe GA_1-et A_2-ben, akkor az FGA_1 szög a $GF'A_2$ háromszög külső szöge, és így $GF'A_2\sphericalangle < FGA_1\sphericalangle$. Továbbá nyilvánvalóan $GF'A_2\sphericalangle = GFA\sphericalangle$. Ezek szerint

$$GFA\sphericalangle < FGA_1\sphericalangle \leq BGD\sphericalangle, \text{ s}$$

$$GAF\sphericalangle = 180^\circ - AGF\sphericalangle - GFA\sphericalangle = 90^\circ + BGD\sphericalangle - GFA\sphericalangle > 90^\circ$$

és még inkább $GA_1F\sphericalangle > 90^\circ$.

Ezzel ellentmondásra jutottunk azzal a feltevésünkkel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Tehát O a PGF háromszög belsejébe esik, és így a mértani hely valóban a $PQMR$ idom belseje, hozzávéve a QM, MR parabolaíveket.

Ennek az idomnak a négyzet kerületéhez legközelebb eső pontja M, hiszen a négyzetet P-ből, mint középpontból úgy kicsinyítve, hogy M a kerületére essék, nyilván tartalmazni fogja a $PQMR$ idomot. Legyen DE és FG felezőpontja N_1, ill. N_2, a négyzet oldala t, akkor M nyilván az N_1N_2 egyenesre esik,

$$MN_1 = t - MN_2, \qquad \text{és} \qquad MN_1 = MF = \sqrt{MN_2^2 + \frac{t^2}{4}},$$

azaz $MN_2 = 3t/8$. Tehát *Pelikán* kérdésére a válasz az, hogy a beírt körök középpontjai nem kerülhetnek $3t/8$-nál közelebb a négyzet kerületéhez, és ez a korlát nem javítható.

Egyébként az is látható, hogy A-nál tompaszöget is megengedve a beírt kör középpontja tetszés szerinti közel eshet a négyzet kerületéhez.

Lovász László