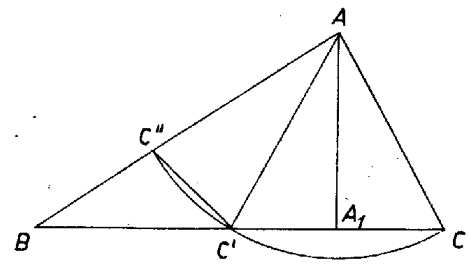
Egy versenyfeladat a következő volt: „*Legyen az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság A_1 talppontja a BC szakasz belső pontja. Mindig kisebb-e az AB és AC oldalak különbsége, mint az A_1B és A_1C szakaszok különbsége? (Indokolás.)*"

Láttuk,[1] hogy a válasz tagadó, ugyanis az egyenlő szárú háromszögekben mind a két különbség nulla.



Az alábbiakban néhány ezzel kapcsolatban felmerülő további kérdést vizsgálunk meg. Megmutatjuk először is, hogy más ellenpélda nincs is: *ha A_1 belső pont és az A-ból kiinduló oldalakra $AB > AC$, akkor $AB - AC < A_1B - A_1C$.*

Messe az A körül AC sugárral írt kör BC-t még a C' pontban, AB-t a C'' pontban. BC-nek A-hoz legközelebbi pontja A_1, és C ettől különböző pont, tehát C' is különbözik C-től, annak az AA_1 tengelyre vett tükörképe. C'' az AB szakasz belső pontja, vagyis B kívül van a körön, s így C' a BA_1 szakaszon van, tehát $A_1B - A_1C = A_1B - A_1C' = BC'$. Így a $BC'' < BC'$ egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ez következik abból, hogy a $BC'C''\triangle$ C''-nél levő szöge tompaszög, hiszen a C''-nél levő külső szöge az $AC'C''$ egyenlő szárú háromszögnek az alapján levő szöge, tehát hegyesszög.

Nézzük még meg, mi a helyzet, ha A_1 pl. a BC szakasz C-n túli meghosszabbítására vagy C-be esik. Ekkor nyilvánvaló, hogy $AB > AC$; az A_1B és A_1C szakaszok különbsége BC, és ez megint kisebb, mint $AB - AC$, a háromszög-egyenlőtlenség szerint.

Ennek az esetnek a kizárása tehát nem volt lényeges, viszont azt célozta, hogy érdektelen esetek taglalása ne vonja el a figyelmet a lényegről: ellenpélda kereséséről.

Scharnitzky Viktor

[1]Lásd *Scharnitzky Viktor:* Az 1965. évi Arany Dániel tanulóversenyek I. fordulóján kitűzött feladatok megoldása (kezdők versenye), K.M.L. 31 (1965) 193–196. o.