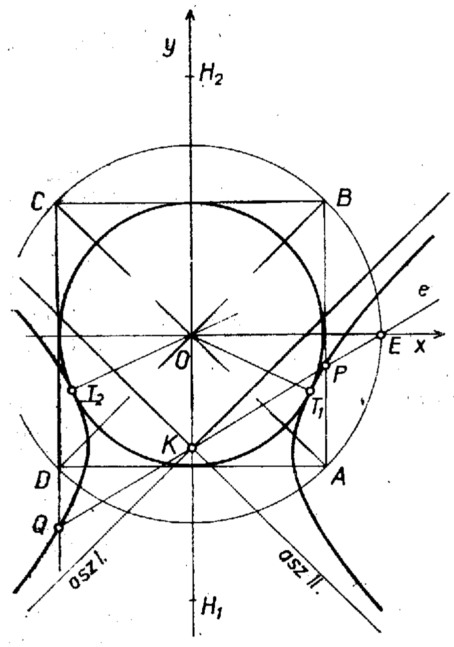
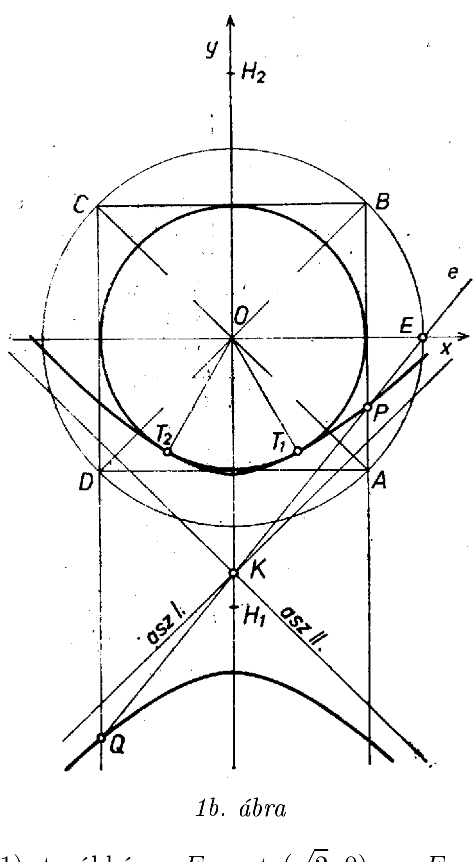
1. Helyezzünk ábránkra koordináta–rendszert úgy, hogy origója az $ABCD = N$ négyzet középpontjába essék és A koordinátái $(1; -1)$ legyenek (az ábra α és β része).



1a. ábra



1b. ábra

Így $B\,(1; 1)$, $C\,(-1; 1)$, $D\,(-1; -1)$, továbbá az E pont $(\sqrt{2}; 0)$, az E-n átmenő és AB-t metsző tetszőleges e egyenes egyenlete

$$y = m(x - \sqrt{2}), \tag{1}$$

ahol m bármely valós szám. Minthogy azonban E rajta van N-nek AB-re merőleges szimmetriatengelyén, az x tengelyen, és így az m iránytangensű e-ből kiindulva készített ábrát az x tengelyre tükrözve a $(-m)$-hez tartozó ábrát kapjuk, azért elég az $m \geq 0$ értékeket tekinteni.

A kérdéses P pont (1)-ből: $(1; m - m\sqrt{2})$, hiszen AB egyenlete $x = 1$, viszont Q abszcisszája -1, mert CD egyenlete $x = -1$; így a hiperbola K középpontjának abszcisszája a felezés folytán 0, s mivel K is rajta van e-n, ezért $K\,(0; -m\sqrt{2})$. A két aszimptota iránytangense N átlóiból $+1$ és -1, tehát egyenletük (mivel átmennek K-n):

(2) $\quad y = x - m\sqrt{2}, \qquad$ (2′) $\quad y = -x - m\sqrt{2}.$

A hiperbola valós és képzetes (szimmetria) tengelye felezi az aszimptoták közti szögeket, tehát egyikük maga az y tengely, a másik párhuzamos az x tengellyel. Ebben a tengelyállásban az aszimptoták iránytangense általában $\pm b/a$, ahol b és a a hiperbola $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ középponti egyenletének állandói,[1] esetünkben tehát $b/a = 1$, $b = a$. A hiperbola egyenletének felírásához éppen azt kell még megállapítanunk, hogy szimmetriatengelyei közül melyik a valós tengely, ti. az, amely a két aszimptota által létrehozott 4 síknegyed közül a P hiperbolapontot tartalmazó negyedben halad. [Maga P nem lehet két síknegyed határán, egyik aszimptotán sem, mert hiperbolának nincs pontja (a végesben) az aszimptotáján, tehát P koordinátáival nem teljesülhet (2), emiatt az $m = 1$ értéket figyelmen kívül kell hagynunk.] Behelyettesítve P koordinátáit (2) bal és jobb oldalának különbségébe:

$$m(1 - \sqrt{2}) - (1 - m\sqrt{2}) = m - 1,$$

és ez $m < 1$ esetén negatív, P az első aszimptota alatt van. S mivel a második aszimptotának mindenesetre fölötte van – a hasonló különbség (2′)-ből $m + 1 > 0$, azért ekkor az y tengely a hiperbolának képzetes tengelye (lásd α).

Az $m > 1$ esetben viszont pozitív a fenti különbség, P mindkét aszimptotának fölötte van, az y tengely a valós tengely szerepét kapja (lásd β). Így a hiperbola egyenlete

$$m < 1 \quad \text{esetén} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{(y + m\sqrt{2})^2}{a^2} = 1 \quad \text{alakú,}$$
$$m > 1 \quad \text{esetén} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + m\sqrt{2})^2}{a^2} = 1 \quad \text{alakú,}$$

és a értékét abból kapjuk, hogy P koordinátái kielégítik az egyenletet:

$$a^2 = \begin{cases} 1 - m^2, & \text{ha } m < 1, \\ -1 + m^2, & \text{ha } m > 1. \end{cases}$$

Ezek szerint az egyenlet a két esetben közösen:

(3) $$x^2 - (y + m\sqrt{2})^2 = 1 - m^2.$$

2. Az N-be beírt kör egyenlete nyilvánvalóan

(4) $$x^2 + y^2 = 1.$$

3. Két görbére akkor mondjuk, hogy érintik egymást, ha van közös pontjuk és abban közös az érintőjük. Esetünkben a közös pont koordinátáit a (3), (4) egyenletrendszer valós megoldásai adják. (4)-ből (3)-at kivonva, majd 0-ra redukálva

(5) $$2y^2 + 2\sqrt{2}m\,y + m^2 = 2\left(y + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

eszerint közös pontjuk ordinátája csak

$$y_1 = -\frac{m}{\sqrt{2}}$$

lehet, és ehhez (3) és (4) bármelyikéből

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{m^2}{2}}, \qquad x_2 = -x_1,$$

ami csak akkor valós, ha $m^2 \le 2$. A hiperbolának és a körnek tehát két közös pontja van: $T_1(x_1,\, y_1)$ és $T_2(-x_1,\, y_1)$, ha $0 < m < \sqrt{2}$, de $m \ne 1$, továbbá egyetlen közös pontjuk $T(0; -1)$, ha $m = \sqrt{2}$.

Vegyük észre, hogy y_1 fele a K középpont ordinátájának, eszerint a közös pontok (ill. pont) az OK szakasz felező merőlegesén vannak.

A közös pontbeli érintők helyett a normálisokról mutatjuk meg, hogy azonosak, aminek feltétele az iránytényezők egyenlősége. Könnyű belátni a már idézett[1] összefüggések alapján, hogy ha a hiperbola középpontja $(u,\, v)$ és tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, akkor az $(x_1,\, y_1)$ pontjában húzott érintő egyenlete a valós tengely állása szerint:

$$\frac{(x_1 - u)(x - u)}{a^2} - \frac{(y_1 - v)(y - v)}{b^2} = \pm 1.$$

Ezt alkalmazva $b^2 = a^2$, $u = 0$ és $v = 2y_1$ esetében az érintő, majd a rá merőleges normális iránytényezője

$$\left(\frac{x_1 - u}{a^2}\right) : \left(\frac{y_1 - v}{b^2}\right) = \frac{x_1}{y_1 - v} = -\frac{x_1}{y_1}, \quad \text{ill.} \quad \frac{y_1}{x_1}.$$

[1] Ide és a továbbiakra vonatkozóan lásd: *Hack Frigyes–Kugler Sándorné:* Függvénytáblázatok. Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968. 86–87. old., 386. 1–386. 7. számú összefüggések.

Az utóbbi viszont egyszersmind a kör normálisának, OT_1-nek iránytényezője, a T_1 pontban, hacsak $x_1 \neq 0$, hiszen $(x_1,\, y_1)$ közös pont. Ugyanezek állnak T_2-re, x_2-re. Ha viszont a közös pontban $x_1 = 0$, ti. a fenti T pontban, akkor $m = \sqrt{2} > 1$, tehát az y tengely a valós tengely, T a hiperbola csúcsa, a kör és a hiperbola érintkezése nyilvánvaló.

Mindezek szerint m lehetséges értékei: $|m| \leq \sqrt{2}$, $|m| \neq 1$. A koordináta–rendszertől függetlenítve, a vizsgált állítás azokra az e egyenesekre érvényes, amelyek a négyzet O középpontját tartalmazó H_1EH_2 szögtartományban haladnak, ahol H_1, H_2 az O pont tükörképe AD-re, ill. BC-re, kivéve az AC, BD átlókkal párhuzamos egyeneseket.

Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Selényi Péter (Budapest, Kvassay J. Hídép. Techn.)

Megjegyzések. 1. A közös pontbeli érintők azonosságát igazolhatjuk azzal is, hogy a kör alsó és a hiperbola felső felét leíró

$$y = -\sqrt{1-x^2}, \qquad\qquad y = -m\sqrt{2} + \sqrt{x^2+m^2-1}$$

függvények deriváltja a fent kapott x_1, x_2, helyeken egyenlő. Az $m = 0$ esetben pedig, amikor $|x_{12}| = 1$, és e helyeken egyik függvénynek sincs deriváltja, P és Q a hiperbola csúcsai, közvetlenül látható, hogy az állítás igaz.

2. Számos dolgozat az érintkezést avval tekintette bizonyítottnak, hogy (5) diszkriminánsa 0, csak egy gyöke van. Láttuk azonban, hogy 2 közös pont van (bizonyos m-ekre), csupán ordinátáik egyenlők. Ebből tehát nem következik az érintkezés. Említi a tankönyv is[2], hogy a közös pontok száma nem lényeges a valamely helyen való érintkezés szempontjából.

Ez az *algebrai* meggondolás méginkább azért *nem teljes* értékű, mert önmagában nem lenne alkalmas pl. az $y = \sin x$ és az $(x - \pi/2)^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbék érintkezésének vizsgálatára.

[2] Lásd *Czapáry E.–Horvay K.–Pálmay L.:* Matematika a gimn. III. o. számára. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968. 294.