A) Legyen az első kihúzott szám e, akkor az ötödik $ö = 3e$, köztük $2e-1$ szám van, közülük kell választanunk a további három számot, ez $\binom{2e-1}{3}$-féleképpen lehetséges.

$2e-1 \geqq 3$ akkor teljesül, ha $e \geqq 2$; másrészt $ö = 3e \leqq 90$ akkor, ha $e \leqq 30$, ennélfogva a $\binom{2e-1}{3}$ binomiális együtthatót az $e = 2,\ 3,\ \dots,\ 30$ értékekre összegezve kapjuk a, kedvező esetek számát:

$$k_A = \sum_{e=2}^{30} \binom{2e-1}{3} = \sum_{e=1}^{30} \frac{(2e-1)(2e-2)(2e-3)}{6}.$$

A második alakhoz hozzáírtuk az $e = 1$ esetén adódó tagot, ez azonban nem változtat az összegen, mert a definíció szerint $\binom{1}{3} = 0$ illetve a kifejtett alakban $2e-2 = 0$. Azért célszerű ez az alakítás, mert a szummázandó tagot e polinomjává alakítva

$$k_A = \frac{4}{3}\sum_{e=1}^{30} e^3 - 4\sum_{e=1}^{30} e^2 + \frac{11}{3}\sum_{e=1}^{30} e - \sum_{e=1}^{30} 1,$$

és itt az 1-es alsó korláttal kezdett összegek ismeretesek, mint a felső korlát függvényei:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad n = 30 \text{ esetén}: 216\ 225,$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad n = 30 \text{ esetén}: 9\ 455,$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n = 30 \text{ esetén}: 465,$$

a negyedik összeg értéke pedig 30, ennélfogva $k_A = 252\ 155$.

Másrészt a lehetséges húzások száma $\binom{90}{5} = 43\ 949\ 268$, így az A tulajdonság bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{252\ 155}{43\ 949\ 268} \approx \frac{1}{174{,}3} = 0{,}005\ 737.$$

B) Legyen a második kihúzott szám m, akkor a negyedik $n = 2m$, a köztük levő, vagyis a h harmadik szám céljára szóba jövő számok száma $m-1$, az m-nél kisebbeké, vagyis az e számára szóba jövőké ugyanennyi, végül $ö$ céljára $90-2m$ szám jön szóba, így h, e és $ö$ összeválogatási lehetőségeinek száma egy rögzített m esetén $(m-1)^2(90-2m) = -2m^3+94m^2-182m+90$. Ahhoz, hogy e és h, ill. $ö$ megválasztható legyen, kell $m-1 \geqq e \geqq 1$, és $90-2m \geqq 1$, ezért $2 \leqq m \leqq 44$. A kedvező esetek együttes száma, a fentebbiekhez hasonlóan

$$k_B = \sum_{m=2}^{44} (m-1)^2(90-m) = -2\sum_{m=1}^{44} m^3 + 94\sum_{m=1}^{44} m^2 - 182\sum_{m=1}^{44} m + 90\sum_{m=1}^{44} 1 =$$
$$= 624\ 360,$$

és így

$$P(B) = \frac{624\ 360}{43\ 949\ 268} \approx \frac{1}{70{,}39} = 0{,}014\ 21.$$

AB) A fenti jelöléseket tovább használva

$$1 \leqq e < m < n = 2m < ö = 3e, \text{ és így}$$
$$e+1 \leqq m \leqq \left[\frac{3e-1}{2}\right]$$

(ahol a szögletes zárójel a benne álló szám egész részét jelöli), és a két korlát kívánt nagyságviszonya akkor teljesül, ha,

$$\left[\frac{3e-1}{2}\right] - (e+1) = \left[\frac{e-3}{2}\right] \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad e \geqq 3.$$

Ekkor $m \geqq 4$, tehát van szám e és $3e$ között m és $2m$ céljára és köztük h céljára. Másrészt $ö = 3m \leqq 90$ miatt $e \leqq 30$.

A lehetséges húzások számának meghatározását célszerű lesz különválasztani e párossága szerint. Legyen először e páros, a fele f, azaz $e = 2f$, $ö = 6f$, $2 \leqq f \leqq 15$. Így $m \geqq 2f+1$ és $n = 2m \leqq 6f-2$ mert n páros, $m \leqq 3f-1$. Mármost f-et rögzítve

$$m = 2f+1, \quad 2f+2, \ \dots, \quad 3f-1$$

esetén h megválasztási lehetőségeinek száma, míg h végigfut az m és $2m$ közti értékeken, mindig $(n-1)-m$, azaz

$$m-1=2f, \quad 2f+1,\ \ldots, \quad 3f-2,$$

összesen

$$\frac{(f-1)(5f-2)}{2}.$$

Ezt f megállapított értékeire összegezve a kedvező húzások száma (itt is hozzávehető az $f=1$-es tag):

$$k'_{AB}=\sum_{f=2}^{15}\frac{(f-1)(5f-2)}{2}=\frac{5}{2}\sum_{f=1}^{15}f^2-\frac{7}{2}\sum_{f=1}^{15}f+15=$$
$$=\frac{5}{12}15\cdot 16\cdot 31-\frac{7}{4}15\cdot 16+15=2695.$$

Ha pedig e páratlan $e=2f+1$, ahol $3\leqq e\leqq 30$-ra tekintettel $1\leqq f\leqq 14$, és így $ö=6f+3$, amiből $n=2m\leqq 6f+2$, tehát $2f+2\leqq m\leqq 3f+1$. Míg m ezen az f számú értéken végigfut, h megválasztási lehetőségeinek száma mindig $m-1$, összesen

$$\sum_{m=2f+2}^{3f+1}(m-1)=\frac{f\big\{(2f+1)+3f\big\}}{2}=\frac{f(5f+1)}{2},$$

és a fentebbihez hasonló befejezéssel

$$k''_{AB}=\sum_{f=1}^{14}\frac{f(5f+1)}{2}=\frac{5}{2}\sum_{f=1}^{14}f^2+\frac{1}{2}\sum_{f=1}^{14}f=\frac{5}{12}14\cdot 15\cdot 29+\frac{1}{4}14\cdot 15=$$
$$=\frac{14\cdot 15}{12}(5\cdot 29+3)=2590.$$

Mindezek alapján

$$k_{AB}=k'_{AB}+k''_{AB}=5285, \text{ és}$$
$$P(AB)=\frac{5285}{43\,949\,268}\approx\frac{1}{8316}=0{,}000\,120.$$

Ezek szerint az A tulajdonság föllépése átlagosan 3 és fél évenként, a B tulajdonságé másfél évenként, együttes föllépésük pedig 166 évenként egyszer várható, ha minden héten egyszer van lottóhúzás.

Kérchy László (Baja, III. Béla Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A vizsgálthoz némileg hasonló volt az 1958. febr. 28-i lottóhúzás: 23, 28, 56, 69, 77, valamint az 1971. jan. 8-i 29, 37, 74, 81, 87.