A 469. fizika feladat közölt megoldásában (K. M. L. XXX. 3. szám, 138. lap) az eredmény helyes, de a megokolás helytelen. Példa ez arra, hogy az intuícióval meglátott végeredmény alátámasztása helytelen lehet. A megoldó ugyanis abból indul ki, hogy feltételezi, miszerint az egyik alátámasztási pont már eljutott a súlypont alá, de a másik még nem. Ez a feltételezés azonban bizonyításra szorul; annál is inkább, mert a közölt feltételek mellett nem is igaz. A pontos meggondolás ugyanis éppen azt mutatja, hogy mindkét alátámasztási pont egyenletesen és felváltva tart a súlypont, mint határérték felé és egyikről sem mondható, hogy előbb jutott alája. Ezt a következőkben tömören igazoljuk.

Legyen a pálca súlya Q, az 1. ék távolsága a súlyponttól a és a 2. éké b. Ekkor – mint ismeretes – az ékekre ható súlymegoszlás

$$Q_1 = \frac{b}{a+b}\,Q, \qquad Q_2 = \frac{a}{a+b}\,Q.$$

vagyis $a = \dfrac{Q_2}{Q_1}\,b$.

Az ékek és a pálca között súrlódó erő lép fel, éspedig kétféle: nyugalmi, *tapadási* (S_t), ha az éken nem mozog a pálca (súrlódási együtthatója μ_0), és mozgási (S_m) μ együtthatóval. Tapasztalat szerint $\mu_0 > \mu$, s ez döntő a továbbiakban. A feladat éppen ennek a kétféle súrlódásnak a szerepére példa.

Az ékek megindulásakor legyen $a < b$ és így $Q_1 > Q_2$.
Ezért

$$S_{1t} = \mu_0 \cdot Q_1 > \mu\, Q_2 = S_{2t}.$$

Az ékek megmozdulásakor tehát a 2. ék indul el a pálca alatt, míg az 1. ék a pálcával együtt mozog. A mozgás folytán előáll, hogy S_{2t} lecsökken $S_{2m} = \mu Q_2$-re.

A pálcának 2. feletti csúszása addig tart, míg a b távolság annyira rövidül, hogy $S'_{1t} = S'_{2m}$ lesz. Ez bekövetkezik b_1-nél amikor is

$$S'_{1t} = \mu_0 \frac{b_1}{a+b_1}\,Q = \mu \frac{a}{a+b_1}\,Q = S'_{2m},$$

vagyis $b_1 = \dfrac{\mu}{\mu_0}\,a$, azaz $\mu_0 > \mu$ folytán $b_1 < a$.

Ebben a pillanatban a pálcára nem hat erő, tehát megáll. Ekkor azonban S'_{2m} a nagyobb S'_{2t} értékre változik, s így $S'_{1t} < S'_{2t}$ lesz. Most tehát az 1. ék fölött csúszik meg a pálca, aminek következményeként S'_{1t} a kisebb S'_{1m} értékre ugrik.

Ez a mozgás addig tart, amíg a_1-nél $S''_{1m} = S''_{2t}$, vagyis

$$\mu \frac{b_1}{a_1+b_1}\,Q = \mu_0 \frac{a_1}{a_1+b_1}\,Q,$$

amiből $a_1 = \dfrac{\mu}{\mu_0}\,b_1 = \left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a$ és nyilván $a_1 < b_1$.

A pálca ismét megáll és S''_{1m} átugrik a nagyobb S''_{1t} értékre s így $S''_{1t} > S''_{1m} = S''_{2t}$ miatt ismét 2. fölött történik a csúszás, s lesz egyszerre S''_{2t}-ből a kisebb S''_{2m}. A mozgás most b_2-ig tart, melyre $S''_{1t} = S''_{2m}$, vagyis

$$\mu_0 \frac{b_2}{a_1+b_2}\,Q = \mu \frac{a_1}{a_1+b_2}\,Q,$$

amiből

$$b_2 = \frac{\mu}{\mu_0}\,a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a.$$

Így folytatódik a két ék felett a csúszás mindig felváltva. Az alátámasztási pontok súlyponttól való távolságának sorozata tehát

$$b > a > b_1 = \frac{\mu}{\mu_0}\,a > a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a > b_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a > a_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 a > \ldots, >$$
$$> b_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n-1} a > a_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n} a > \ldots .$$

$$\text{Az 1. ék esetén: } a;\ a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a;\ a_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 a;\ \ldots a_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n} a;\ \ldots,$$

$$\text{és a 2. ék esetén: } b;\ b_1 = \frac{\mu}{\mu_0}\,a;\ b_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a;\ \ldots b_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n-1} a;\ \ldots .$$

Mindkét sorozat végtelen geometriai haladvány, melynek hányadosa $\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)^2$, tehát mindkettő határértéke 0. A két alátámasztási pont tehát egyenletesen váltakozva tart a súlypont felé és alatta találkozik, de egyik sem ér előbb oda. A közölt megoldás feltételezése tehát hibás.

Azt hiszem, a fönti gondolatmenet arra is választ ad, miért kellett a feladatban feltételezni a pálca egyenletesen érdes felületű egyenes voltát.

Dózsa Márton

(Azok részére, aki a XXX. kötetet nem olvasták, itt közöljük újból a tanulságos feladat szövegét:

469. Támasszunk alá egy egész hosszában egyenletesen érdes felületű egyenes pálcát két tetszőleges pontjában. (Gyakorlatban vehetünk egy sétapálcát vagy vonalzót, és mutatóujjunkkal támasszuk alá.) Kérdés: a pálca melyik pontja alatt találkozik a két ék, ha azonos abszolút értékű állandó sebességgel mozognak egymás felé?

Közli: *Dózsa Márton*