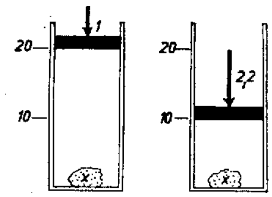
**Az I. forduló feladatai:**

**1.** 20 cm$^3$ *térfogatú orvosi fecskendőbe* 1 *atmoszféra nyomású levegőt zárunk. A fecskendőbe előzőleg porózus anyagot helyezünk. Mekkora a porózus anyag térfogata, ha a dugattyút a* 10 cm$^3$*-es jelig benyomva a belső nyomás* 2,2 *atmoszférára emelkedik?*



*1. ábra*

**Megoldás.** Boyle-Mariotte törvényét alkalmazzuk, mert a hőmérséklet állandó marad. (1. ábra). Ha a porózus anyag térfogata $x$ cm$^3$, akkor az első állapotban 1 atmoszférás nyomás mellett a levegő térfogata $(20 - x)$ cm$^3$. A végállapotban a nyomás 2,2 atmoszféra, és az ugyanakkora tömegű levegőnek a térfogata $(10 - x)$ cm$^3$. A nyomás és tétfogat szorzata állandó:

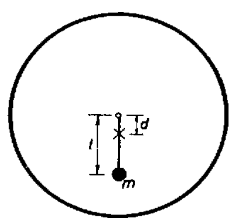
$$1 \cdot (20 - x) = 2{,}2 \cdot (10 - x).$$

Ebből az egyenletből a porózus anyag térfogatára kapjuk:

$$x = 1{,}67 \text{ cm}^3.$$

Az eljárás elvben arra alkalmas, hogy porózus anyagok (szivacs, homok) anyagának valódi térfogatát meghatározzuk. Az eljárás pontossága nem nagy.

**2.**
a) a kereket tengelyén teljesen kiegyensúlyozza (a kerék a tengelyen minden helyzetben egyensúlyban marad),
b) a kerék küllőjére a forgásponttól $l$ távolságra $m$ tömegű, pontszerűnek tekinthető ólomnehezéket erősít,
c) a kereket lengésbe hozza és megméri a $T$ lengésidőt.
Megkaphatja-e ezekből az adatokból a keresett tehetetlenségi nyomatékot? Mekkora ez, ha $m = 0{,}5$ kg, $l = 0{,}2$ m és $T = 1{,}2$ sec? *Valaki kerékpárja első kerekének tehetetlenségi nyomatékát úgy akarja meghatározni, hogy*
*a) a kereket tengelyén teljesen kiegyensúlyozza (a kerék a tengelyen minden helyzetben egyensúlyban marad),*
*b) a kerék küllőjére a forgásponttól $l$ távolságra $m$ tömegű, pontszerűnek tekinthető ólomnehezéket erősít,*
*c) a kereket lengésbe hozza és megméri a $T$ lengésidőt.*
*Megkaphatja-e ezekből az adatokból a keresett tehetetlenségi nyomatékot? Mekkora ez, ha $m = 0{,}5$ kg, $l = 0{,}2$ m és $T = 1{,}2$ sec?*



*2. ábra*

***Megoldás.*** *A kerék tömege eredetileg $M$, tehetetlenségi nyomatéka $I$. Ha ráerősítjük $l$ távolságban az $m$ tömeget, az együttes tömeg $M + m$, az együttes tehetetlenségi nyomaték $I + ml^2$, és a súlypontnak a tengelytől mért távolsága $d$ lesz (2. ábra). Az ilyen módon létrejött fizikai inga lengésideje:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{(M + m)gd}}.$$

*Ki kell számítanunk a $d$ súlyponttávolságot. Az erre szolgáló aránypár:*

$$d : (l - d) = m : M,$$

*innen:*

$$d = \frac{m}{M + m} \cdot l.$$

*Behelyettesítve ezt a lengésidő képletébe, $M + m$ kiesik és kapjuk:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + ml^2}{mgl}}.$$

*Tehát a kerék tömegének ismerete nélkül kapjuk meg a tehetetlenségi nyomatékot; eredményünket rendezve:*

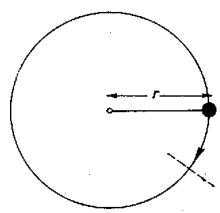
$$I = mgl\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - ml^2.$$

*A megadott számadatokkal a kerék eredeti tehetetlenségi nyomatéka:*

$$I = 157\ 700\ \mathrm{gr}\cdot\mathrm{cm}^2 = 0{,}01577\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$

***3.*** 1 cm *sugarú gömböt* 900 V *feszültségre töltünk fel. A gömböt* 30 cm *hosszszú szigetelő nyélre helyezve* 18000/perc *fordulatszámmal megforgatjuk. Mekkora mágneses térerő észlelhető a forgástengely helyén? (A forgó kis gömböt a mágneses tér meghatározásához tekintsük pontszerű töltésnek.) A körvezető középpontjában a mágneses térerősség* $H = \dfrac{I}{2r}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$.

***Megoldás.*** *Először meg kell határoznunk, mennyi a kis gömbben levő töltés. A gömb kapacitása arányos rádiuszával; ha R rádiuszt cm-ben, C kapacitást faradban mérjük, akkor* $C = R/9\cdot 10^{11}$. *Tehát az 1 cm-es gömb kapacitása* $C = 1{,}11\cdot 10^{-12}$ farad $= 1{,}11$ pF. *A gömb töltése* $Q = CU$ *alapján* $Q = 1{,}11\cdot 10^{-12}\cdot 900 = 10^{-9}$ coulomb = 1nC.



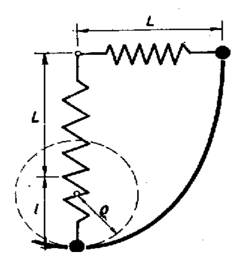

*3. ábra*

*A kör mentén körülvitt töltés köráramot jelent (3. ábra). A percenként 18 000-es fordulatszám 1 másodperc alatt 300 fordulat, tehát a körpálya valamely pontján az 1 nC 1 másodperc alatt 300-szor halad át és így a mozgatott töltés mágneses hatása olyan, mint az* $I = 300\cdot 1\cdot 10^{-9} = 3\cdot 10^{-7}$ amper $= 0{,}3\ \mu A$ *erősségű elektromos áramé.*

*A köráram középpontjában jelentkező mágneses térerősségre megadott képlet szerint* $H = 3\cdot 10^{-7}/2\cdot 0{,}3 = 5\cdot 10^{-7}$ A/m. *(Ha a mágneses térerősséget a* $0{,}2\pi I/r$ *képlettel számítjuk ki, akkor* $H = 0{,}2\pi\cdot 3\cdot 10^{-7}/30 = 6{,}28\cdot 10^{-9}$ *oersted.)*

### *A II. forduló feladatai*

***1.*** *Felfüggesztett L hosszúságú rugóra olyan kisméretű testet akasztunk, amely a rugót eredeti hosszának c-szeresével nyújtja meg (l = cL). A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó ekkor nyújtatlan állapotban van, hossza L), és innen elengedjük. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?*




*4. ábra*

***Megoldás.*** *Az eredetileg L hosszúságú rugó l megnyúlása arányos az L eredeti hosszal és a P nyújtó erővel:* $l = eLP$; *a feladat szövegében szereplő állandó* $c = eP$. *Az l megnyúlást okozó erő* $P = l/eL$. *Az induláskor L hosszúságú rugó hossza a felfüggesztési pont alatt való áthaladáskor* $L + l$, *ezalatt az m nagyságú tömegnél a nehézségi erő munkavégzése* $mg(L + l)$, *(4. ábra).*

*Ha a felfüggesztési pont alatt v sebességgel halad át a tömeg, akkor mozgási energiája* $mv^2/2$. *A megnyúlt rugóban rugalmas energia van elraktározva. A nyújtáshoz szükséges munkavégzés L úton történt 0-ról* $l/eL$*-re lineárisan növekvő erővel szemben, ezért középértékben az erő felét véve számításba a rugó nyújtásához szükséges munkavégzés:*

$$\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{l}{eL} = \frac{l^2}{2eL}.$$

*A mechanikai energiamegmaradás törvénye szerint a nehézségi erő munkája egyenlő a megszerzett mozgási energia és a rugalmas erővel szemben végzett munka összegével:*

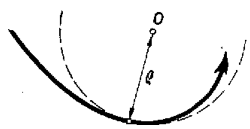
$$mg(L + l) = \frac{mv^2}{2} + \frac{l^2}{2eL}.$$

*Ebben az egyenletben $l$ és $v$ az ismeretlenek.*

*Amikor a mozgó tömeg függőlegesen a felfüggesztési pont alatt van (és vízszintes irányban halad), akkor a rugó ereje szolgáltatja az $mg$ súly ellenerejét és a centripetális erőt:*

$$\frac{l}{eL} = mg + \frac{mv^2}{\varrho}.$$

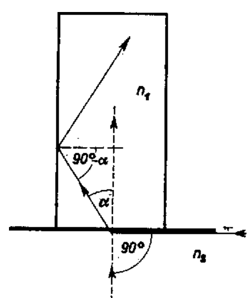
*Itt $\varrho$ a pálya görbületi sugara. Tehát ebben az egyenletben három ismeretlen van: $l$, $v$ és $\varrho$.*




*5. ábra*

*Ha egy tömeg görbe pályán mozog, akkor az centripetális erő $mv^2/\varrho$. $\varrho$ a görbületi sugár, azon kör rádiusza, amely az illető helyen legpontosabban simul a görbéhez (5. ábra). (A görbületi kör fogalma megtalálható például a Középiskolai Matematikai Lapok 1964. évi 3. számában a 129. oldalon kezdődő cikkben.) Feladatunkban a kérdezett pontban ismeretlen a görbületi sugár értéke, ezért a feladatot nem tudjuk megoldani. Az a gondolat, hogy a kérdéses pontban a görbületi sugár $L+l$ volna, minden alapot nélkülöz. Nagyon is kérdéses, hogy a görbületi középpont egyáltalán benn van-e a felfüggesztési ponton átmenő függőlegesben, amikor a tömeg ezen áthalad, vagyis, hogy a tömeg vízszintesen halad-e át a felfüggesztési pont alatt. Adott numerikus értékek mellett, hosszadalmas számítási eljárásokkal a tömeg pályája bizonyos közelítéssel megállapítható.*

***2.** A száloptikás orvosi tükör (endoszkóp) optikai modellje adott $n_1$ törésmutatójú szál, amelyet oldalról $n_2$ törésmutatójú anyag vesz körül. A szál vége síklap, amely $n_3$, törésmutatójú közeggel érintkezik. (A törésmutatók levegőre vonatkoznak.) Hogyan kell $n_1$ értékét megválasztanunk ahhoz, hogy a szálon keresztül a véglap alatti teljes félteret láthassuk, ha a) $n_2 = n_3 = 1$, b) $n_2 = 1$ és $n_3 = 4/3$?*




*6. ábra*

***Megoldás.** Vegyük figyelembe azt a határesetet, amikor a fénysugár az $n_3$ törésmutatójú anyagból súrlódva érkezik a határfelületre és az $n_1 - n_2$ határfelületet a teljes visszaverődés határszöge alatt érinti (6. ábra). $\alpha$ az $n_1$ törésmutatójú közegbe belépő sugár irányát jelzi. Az $n_3 - n_1$ határfelületen:*

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_3};$$

*a teljes visszaverődés határesetének feltétele az $n_1 - n_2$ határfelületen:*

$$\frac{1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

*Mivel $\sin 90^\circ = 1$ és $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, ezért $\sin\alpha = n_3/n_1$ és $\cos\alpha = n_2/n_1$. $\alpha$ kiküszöbölése leggyorsabban a négyzetek összegezésével történik:*

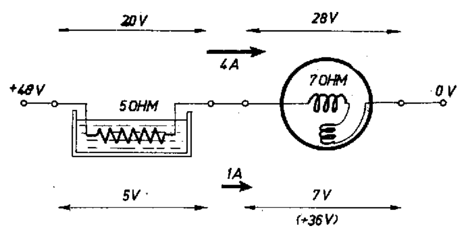
$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

*Rendezéssel: $n_1^2 = n_2^2 + n_3^2$, illetve $n_1 = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}$. Ez $n_1$ azon értékét adja meg, amely mellett a fénysugár mindkét határfelületet a teljes visszaverődés feltételével érinti. Ha $n_1$ értéke nagyobb, a fénysugár behatolása a szálba és a szálban maradása még bizonyosabb. Tehát a válasz úgy szól, hogy $n_1$ törésmutatónak nem szabad kisebbnek lennie, mint a másik két törésmutató négyzetösszegének négyzetgyöke. Az eredmény $n_2$ és $n_3$ tekintetében szimmetrikus, e két anyag felcserélhető. Száloptikáról lévén szó, meg kell említeni, hogy az $n_3$-as közegből a szálba behatoló sugárnyaláb szálban maradása egyáltalán nem jelenti azt, hogy képalkotás is történik, vagyis, hogy a berendezés használható. Lényegében* *ugyanez a jelenség szerepel abban a közismert kísérletben, hogy egy üvegkocka oldaláról nem látható az üvegkocka alatt levő tárgy (az 1936. évi Eötvös verseny 3. feladata).*

*A feladatban kérdezett a) esetben* $n_1 = \sqrt{2}$*, b) esetben* $n_1 = 5/3$.

***3.*** 48 *voltos generátor áramkörébe sorba kapcsolunk egy motort és egy kaloriméterbe helyezett* 5 *ohm ellenállású vezetőt. A generátor és az egyéb kapcsoló huzalok ellenállása elhanyagolható. Ha a motor forgásban van, a kaloriméterben* 72 *cal, ha pedig a motort akadályozzuk a forgásában,* 1152 cal *hő keletkezik percenként. Mekkora forgás közben az indukált ellenelektromotoros erő és a motor kapocsfeszültsége?*

***Megoldás.*** *Az áram hőhatásának* $Q = 0{,}24 I^2 Rt$ *törvénye alapján azonnal kiderül, hogy ha a motor áll (*$Q = 1152$ cal, $R = 5$ ohm, $t = 60$ sec*), az áramerősség 4 amper, ha a motor forog (*$Q = 72$ cal, $R = 5$ ohm, $t = 60$ sec*), az áramerősség 1 amper.*




*7. ábra*

*Először tárgyaljuk a forgásában megakadályozott motor esetét (7. ábra, a felső számok). Ha az áramerősség 4 amper, akkor a kaloriméterben levő 5 ohmra* $4 \cdot 5 = 20$ *volt feszültségesés jut. Az áramforrás változatlan 48 voltos elektromotoros erejéből a motorra* $48 - 20 = 28$ *volt jut. Minthogy a motoron is átfolyik 4 amper, a motor tekercselésének ohmos ellenállása* $28 : 4 = 7$ *ohm értékű.*

*Most vizsgáljuk a forgásban levő motort (7. ábra, az alsó számok). 1 amperes áramerősség mellett a kaloriméterben levő 5 ohmra* $1 \cdot 5 = 5$ *volt jut. A motortekercselések 7 ohmjára most* $1 \cdot 7 = 7$ *voltnak kell jutnia. Marad az áramforrás 48 voltjából* $48 - 5 - 7 = 36$ *volt. Ekkora a forgáskor indukció által keltett ellenelektromotoros erő. A motor kivezetéseire eső kapocsfeszültség* $36 + 7 = 43$ *volt, vagy* $48 - 5 = 43$ *volt. Az ellenelektromotoros erővel szemben végzett munka alakul mechanikai munkává, így motorunk mechanikai teljesítménye* $36 \cdot 1 = 36$ *watt, amely üresen járó motornál csapágysúrlódás, közegellenállás leküzdésére fordítódik. A motor által felvett teljesítmény* $43 \cdot 1 = 43$ *watt, így a hatásfok* $36/43 = 0{,}84 = 84\%$.

*Általánosságban és kaloriméter nélkül tárgyalva, ha a motor tekercselése R ohm ellenállású,* $U_0$ *elektromotoros erejű feszültségforrásra van kapcsolva és állva* $I_á$*, forogva* $I_f$ *az áramerősség, akkor a motor ohmos ellenállása* $U_0/I_á$ *lévén a forgáskor ellenindukált elektromotoros erő*

$$U = U_0 - I_f \cdot \frac{U_0}{I_á} = U_0 \left(1 - \frac{I_f}{I_á}\right).$$