

A fizikai kölcsönhatások gyakran kiegyenlítő jellegűek: ha két vagy több test bizonyos tulajdonságai (sebesség, hőmérséklet) különböző értékűek, a kölcsönhatás során ezek kiegyenlítődnak, átlagolódnak. Másképpen fogalmazva azt is mondhatjuk, hogy több részből álló rendszer egy bizonyos sajátosságát tekintve helyettesíthető eggyel. Ez utóbbi megfogalmazás általánosabb is, mert sztatikus esetekre, amikor keveredés nem történik, szintén alkalmazható.

Az átlagérték-képzés problémája már a változó mozgás tanulmányozásakor előkerült. Az átlagsebességet így definiáltuk: a megtett út osztva a megtételéhez szükséges idővel. Az átlagsebesség az az egyenletes sebesség, amellyel a mozgó test a meghatározott  $t$  idő alatt ugyanakkora utat tesz meg, mint változó mozgása során. Tehát az átlagérték képzésekor a változónak egy olyan értékét keressük, amellyel az összes előforduló értéket helyettesítve valamely – a szóban forgó értékektől függő mennyiség értéke ugyanaz marad.  $n$  számú változó érték mellett az ún. számtani átlag az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{x} \cdot n$$

összefüggésből kapható:

$$(1.1) \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n,$$

ahol a  $\sum$  jel (szumma) összegezést jelent.

Az  $x_i$  értékek között lehet több egyenlő is. Tegyük fel, hogy  $x_i$   $k_i$ -szer fordul elő az összegben. Ezeket összevonva a következő összefüggést kapjuk:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m = \bar{x} \cdot (k_1 + k_2 + \dots + k_m),$$

azaz

$$\sum_i k_ix_i = \bar{x} \cdot \sum_i k_i,$$

így

$$(1.2) \quad \bar{x} = \sum_i k_ix_i / \sum_i k_i,$$

ahol  $\sum k_i = n$ . (Az összegjel határait csak akkor írjuk ki, ha szükséges, egyébként értelemszerűen az összes összegzendőre vonatkozik.) Így jutunk el a súlyozott átlag fogalmához, megengedve, hogy a  $k_i$  számok tetszőleges pozitív értéket vegyenek fel. Az  $x_i$  értékek különböző erősséggel, súllyal szerepelnek az átlagban.

Az eddigiekben az átlagsebesség példájából kiindulva azt feltételeztük, hogy egy anyagi test valamilyen tulajdonsága vesz fel különböző értékeket. Átlagképzés viszont akkor is lehetséges, ha több test valamely közös tulajdonságának egy megfigyelés során felvett értékeiről van szó. Ilyen esetekben a súlyozás más jelentést is kaphat. Az átlagolásra kerülő egyedek az átlagképzés szempontjából különböző értékűek lehetnek.

Belátható, hogy a súlyozott átlag az átlagolandó sorozatban előforduló legnagyobb és legkisebb érték közé esik:

$$(1.3) \quad x_{\min} < \bar{x} < x_{\max}.$$

Ennek bizonyítását az olvasóra bizzuk.

A továbbiakban vizsgáljuk meg, hol találkozunk súlyozott átlag képzésével a középiskolai fizika anyagban.

### Rugalmatlan ütközés

Két test rugalmatlan ütközésekor a mozgásmennyiség nem változik meg:

$$(m_1 + m_2) \cdot \bar{v} = m_1v_1 + m_2v_2,$$

így a közös sebesség:

$$(2.1) \quad \bar{v} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Ütközés után mozgásukat együtt folytatják, sebességük a megfelelő tömegekkel súlyozva átlagolódnak. Nyilvánvaló, hogy az összefüggés kettőnél több test rugalmatlan ütközése esetén is érvényes,

$$(2.2) \quad \bar{v} = \sum_i m_iv_i / \sum_i m_i.$$

### Fajsúlymérés

Ismeretes a már Archimedes által megoldott probléma: a szirakuzai király koronája aranytartalmának meghatározása. Az arany-ezüst korona súlya levegőben 20 egység, vízben 18,75 egység, kérdés: mennyi a korona százalékos aranytartalma. Az adatokból a felhajtóerő 1,25 egység. Jelöljük az arany súlyát  $G_1$ -gyel, az ezüstét  $G_2$ -vel, ekkor

$$G = G_1 + G_2$$

azaz

$$(V_1 + V_2)\bar{\gamma} = V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2,$$

ahol  $\bar{\gamma}$  az ötvözet fajsúlyát jelenti, ebből

$$(3.1) \quad \bar{\gamma} = \frac{V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2}{V_1 + V_2}.$$

Tehát a fajsúly átlagolódik a keveredés során, de az egyes anyagok fajsúlya a térfogattal súlyozva van.

A feladatban ismerjük  $V_1 + V_2$  értékét így,  $\bar{\gamma}$  kiszámítható.  $V = V_1 + V_2 = 1,25$  térfogategység, hiszen a felhajtóerő 1,25 egység és a víz fajsúlyát egységnyinek vesszük ( $1 \text{ p/cm}^3$ ). Így

$$(3.2) \quad \bar{\gamma} = G/V = 20/1,25 \text{ egység} = 16 \text{ p/cm}^3.$$

$$\bar{\gamma} = \frac{V_1\gamma_1 + (V - V_1)\gamma_2}{V} = \frac{V_1(\gamma_1 - \gamma_2) + V\gamma_2}{V}$$

alapján

$$(3.3) \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\bar{\gamma} - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = 62,5 \text{ térf. \%}$$

Ez az összefüggés az alkotórészek százalékos eloszlásának meghatározásához mindig felhasználható. Látható, hogy a fajsúlyátlag dimenziója csupán az általunk választott egységtől függ és független a súly és térfogat egységétől. A százalék pedig viszonzyszám, amely dimenziómentes.

### Párhuzamos erők összegezése

Egy testre (gerendára) ható erők összegezése, az eredő erő, illetve az egyensúlyhoz szükséges ellenerő támadáspontjának számítása is súlyozott átlagolásra vezet. Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők és forgatónyomatékok összege nulla legyen:

$$\sum_k P_k + (-P) = 0,$$

azaz

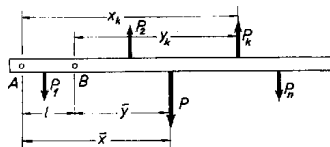
$$(4.1) \quad P = \sum_k P_k;$$

$$\sum_k P_k x_k + (-P)\bar{x} = 0,$$

tehát

$$(4.2) \quad \bar{x} = \sum_k P_k x_k / \sum_k P_k.$$

4.2-ből látható, hogy az egyensúlyozó, illetve az eredő erő karja a testre ható erők karjainak az erőkkel súlyozott átlaga.



1. ábra

Könnyen beláthatjuk azt is, hogy a forgatónyomatékok felírásakor tetszőleges helyen vehetjük fel a vonatkoztatási pontot, akár a testen kívül is (1. ábra). Vegyük fel a vonatkoztatási pontot először A-ban, majd B-ben. A megfelelő erőkarokat jelöljük  $x$ -szel, illetve  $y$ -nal. Az ábrából látható, hogy

$$(4.3) \quad y_k - x_k = AB = l.$$

Felírva az átlagképző egyenletet

$$(4.4) \quad \bar{y} = \frac{\sum_k P_k y_k}{\sum_k P_k},$$

a 4.3 és 4.4 egyenletekből

$$(4.5) \quad \bar{y} = \frac{\sum_k P_k (l + x_k)}{\sum_k P_k} = \frac{\sum_k (P_k \cdot l + P_k x_k)}{\sum_k P_k}.$$

4.5-ből kapjuk:

$$(4.6) \quad \bar{y} = \frac{l \cdot \sum_k P_k + \sum_k P_k x_k}{\sum_k P_k} = l + \bar{x},$$

ami bizonyítja állításunkat, hogy az egyensúlyozó erő támadáspontja független a vonatkoztatási pont felvételétől.

### Izotermikus gázok keveredése

Hasonlóan átlagolódnak a különböző térfogatban elhelyezkedő, különböző nyomású gázok nyomásértékei, ha állandó hőmérsékletet tartva, az elválasztófalakat kiemeljük.

$$(5.1) \quad \bar{p} = \frac{\sum_i p_i V_i}{\sum_i V_i},$$

a kialakuló átlagnyomás az egyes nyomásoknak a megfelelő térfogatokkal súlyozott átlaga. Ezzel kapcsolatban még egy érdekességet említünk meg. Egy  $n$  edényből álló rendszerrel vizsgáljuk a  $k$ -edik edényt, és tágítsuk ki az összes edény térfogatával egyenlő térfogatra. A Boyle-Mariotte törvény szerint a nyomás a

$$(5.2) \quad p'_k \sum_i V_i = p_k V_k$$

egyenletből kapható. (A jobb megértés kedvéért két indexet használunk, de  $i$  és  $k$  egyaránt 1-től  $n$ -ig fut.) 5.2-ből

$$(5.3) \quad p'_k = p_k V_k / \sum_i V_i.$$

Ha ezt az eljárást minden edényre elvégezzük és összegezzük a  $p'_k$ -ket (most természetesen a  $k$  index szerint), akkor

$$(5.4) \quad \sum_k p'_k = \sum_k (p_k V_k / \sum_i V_i) = \sum_k p_k V_k / \sum_i V_i.$$

A kifejezés jobboldala egyenlő az 5.1 egyenlet jobboldalával. (Ne zavarjon az indexek különbözősége:  $k$  helyébe ismét visszaírhatjuk az  $i$ -t.) 5.1–5.4-ből adódik

$$(5.6) \quad \bar{p} = \sum_k p'_k,$$

az átlagnyomás az úgynevezett parciális nyomások összege.

### Kalorimetria

Végül vizsgáljuk meg részletesebben a kalorimetriás jelenségeket. Két vagy több test közötti hőcserélődés esetén alapfeltételünk, hogy hőmennyiség a rendszerből nem távozik el, és nem jut a rendszerbe. Két anyag keveredésekor az egyik által leadott hőt a másik felveszi:

$$(6.1) \quad c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2),$$

innen

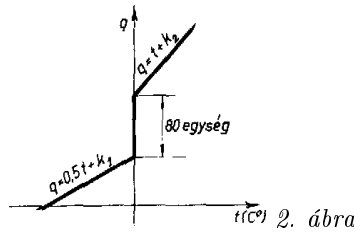
$$(6.2) \quad t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}.$$

Látható, hogy a hőmérséklet az egyes hőmérsékleteknek a megfelelő  $c_i m_i$  értékekkel súlyozott átlaga. Ez érthető is, mert  $c_i m_i$  az  $i$ -edik tömeg hőkapacitása. Tehát azokban az esetekben, ha átalakulási pontokon (olvadás, párolgás, stb.) nem megyünk keresztül,

$$(6.3) \quad t = \frac{\sum_i c_i m_i t_i}{\sum_i c_i m_i}.$$

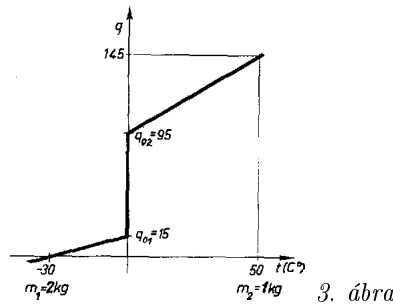
Az átalakulási pontokon áthaladó folyamatok esetében nehezebb a közös hőmérséklet meghatározása. Egy anyag különböző halmazállapotai esetében mégis találhatunk egy érdekes felírási módot.

Vezessük be az illető anyagra a  $t$  hőmérsékleti skála helyett a következő  $q$  hőskálát, amelyet a következőképpen definiálunk:  $q = c \cdot t$  szerint változik az átalakulási pontokon kívül, az egyes halmazállapotok között pedig az átalakulási hőnek megfelelő számértékű  $q$  egység helyezkedik el. A jég-víz átalakulási pont környékén a  $q = f(t)$  függvény alakját a 2. ábra mutatja:  $k_1$  és  $k_2$  állandók értékét a  $q$  skála nullpontjának tetszőleges megválasztásával adhatjuk meg.



Egy számpéldán könnyebben megérthetjük ezt. Keverjünk össze 2 kg  $-30\text{ }^\circ\text{C}$ -os jeget és 1 kg  $50\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet. Mi lesz belőle?

Eddigi módszerünk szerint a vizet lehűtöttük  $-30\text{ }^\circ\text{C}$ -os jégé, és az így felszabadult hőmennyiséggel gazdálkodtunk az egész mennyiségre vonatkozóan. 1 kg  $50\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz lehűtésekor  $Q = (1 \cdot 1 \cdot 50 + 1 \cdot 80 + 0,5 \cdot 1 \cdot 30)$  kcal =  $(50 + 80 + 15)$  kcal = 145 kcal hő szabadul fel, és van 3 kg  $-30\text{ }^\circ\text{C}$ -os jégünk. Ha ezt a mennyiséget felmelegítjük  $0\text{ }^\circ\text{C}$ -ra, akkor  $Q_1 = (0,5 \cdot 3 \cdot 30)$  kcal = 45 kcal használdik fel. Marad még 100 kcal. A maradékból  $M$  kg átalakul  $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzé.  $100\text{ kcal} = 80 \cdot M$  kcal és így  $M = 5/4$  kg = 1,25 kg víz.



Tegyük át most a két tömeget a  $q$  skála megfelelő pontjaira; legyen a jég a  $q = 0$  helyen. A  $q$  skála most a 3. ábrán látható. Tehát  $q = 0$ -nál van 2 kg tömeg,  $q = 145$ -nél 1 kg tömeg. Átlagolunk  $q$ -ra, súlyként a tömegeket választva:

$$(6.4) \quad \bar{q} = \frac{\sum_i m_i q_i}{\sum_i m_i} = (2 \cdot 0 + 1 \cdot 145) / 3 = 145 / 3 = 48,33.$$

Mit is tettünk ezzel tulajdonképpen? A hőmérséklet átlagolása helyett az egységnyi tömegek hőtartalmát átlagoltuk a tömegekkel súlyozva. Matematikailag pedig a  $Q = f(t)$  hőtartalom – hőmérséklet összefüggés helyett, amelynek az átalakulási pontokon ugrása van, a  $Q = f(q)$  folytonos függvényt vezettük be.

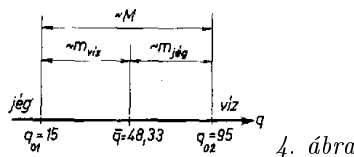
A 6.4 érték az átalakulási tartományban van. Képezzük a következő hányadost:

$$(6.5) \quad R = \frac{\bar{q} - q_{01}}{q_{02} - q_{01}} = (48,33 - 15) / (95 - 15) = 33,33 / 80 = 1,25 / 3,$$

$R$  a vízzé alakult tömeg és az összes tömeg hányadosa:

$$(6.6) \quad R = m_{\text{víz}} / M. \quad (4. \text{ ábra})$$

A  $\bar{q}$  pont ugyanis az átalakulási szakaszt a kétféle halmazállapot arányában osztja fel (a megfelelő szakaszok az ábrából láthatóan fordítva helyezkednek el). Ha  $\bar{q}$  egy halmazállapotnak megfelelő szakaszra kerül, akkor nem jelent nehézséget a megfelelő közös hőmérséklet megadása.



Különböző anyagok esetén, ha a folyamat során halmazállapot-változás is történik, az átlagoláskor nem használhatjuk ezt a módszert. Hőmérséklet-kiegyenlítődéskor még egy érdekes esetre hívjuk fel a figyelmet. Archimedes korona feladatánál az arány kiszámításához szükséges második egyenletet a felhajtóerő-térfogat összefüggésből kapjuk. Előfordulhat azonban az is, hogy az ötvözet-arány megállapításához szükséges adatokat (a tömegmérésen kívül) kalorimetriás úton szerezzük meg.

Legyen egy két anyagból álló ötvözet tömege  $M$ , hőmérséklete  $t_1$ . Dobjuk az ötvözetet  $m_0$  tömegű,  $t_0$  hőmérsékletű folyadékba. A közös hőmérséklet  $t$ . Ismerjük még a két anyag sűrűségét ( $d_1, d_2$ ), fajhőjét ( $c_1, c_2$ ) és a hűtőfolyadék fajhőjét ( $c_0$ ). Feladat: a tömegarányok és a közös sűrűség meghatározása.

A kalorimetriás adatokból:

$$(6.7) \quad \bar{c}M(t_1 - t) = c_0m_0(t - t_0),$$

ahol  $\bar{c}$ -sal az ötvözet fajhőjét jelöljük.

$$(6.8) \quad \bar{c} = \frac{c_0m_0(t - t_0)}{M(t_1 - t)}.$$

Hogyan jött létre ez a közös fajhő? Nyilván összefüggésben van az ötvözetet alkotó anyagok hőkapacitásával. Ezeket szétválasztva a

$$(6.9) \quad \bar{c}M = c_1m_1 + c_2m_2$$

egyenletet írhatjuk fel, ahol  $M = m_1 + m_2$ , általános esetben

$$(6.10) \quad \bar{c} = \frac{\sum_i m_i c_i}{\sum_i m_i}.$$

Láthatjuk, hogy az ötvözet fajhője az összetevők fajhőinek a megfelelő tömegekkel súlyozott átlaga. Most ismét az a helyzet, hogy  $\sum_i m_i = M$  összeget ismerjük. 6.10 összefüggésben ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\bar{c} = \frac{c_1m_1 + c_2(M - m_1)}{M} = (c_1 - c_2)\frac{m_1}{M} + c_2.$$

Rendezve

$$(6.11) \quad \frac{\bar{c} - c_2}{c_1 - c_2} = \frac{m_1}{M}.$$

A baloldalon ismert értékek, a jobboldalon az első összetevő tömegének az egész tömeghez viszonyított értéke áll. Az átlagsűrűséget 3.1-hez hasonlóan kapjuk:

$$(6.12) \quad \bar{d} = \frac{\sum_i V_i d_i}{\sum_i V_i}.$$

Most a tömegeket ismerjük (bár a térfogatokat is ki tudjuk számítani), ezért

$$\bar{d} = \sum_i \frac{m_i}{d_i} \cdot d_i / \sum_i \frac{m_i}{d_i} = \sum_i m_i / \sum_i \frac{m_i}{d_i}.$$

A reciprok értéket véve

$$(6.13) \quad 1/\bar{d} = \frac{\sum_i m_i/d_i}{\sum_i m_i}$$

Tehát a sűrűség reciprok értékei átlagolódnak, ha a térfogat helyett a tömeggel súlyozunk. Ez azonban már egy másfajta átlagképzés problémáihoz tartozik.