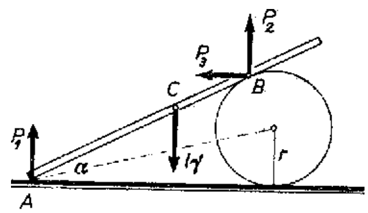
A dinamikai példák megoldásáról

A mechanikai feladatok között sűrűn fordulnak elő a dinamikai (statikai és kinetikai) példák. Ezeket – a Középiskolai Matematikai Lapok-hoz beérkező dolgozatok tanúsága szerint sokszor nem a legcélszerűbb módon szokták megoldani. Sokan a megoldásnak azt a módját választják, hogy egy erre az esetre alkalmazható ötletes gondolatmenetet felhasználva viszonylag kevés „írással” röviden oldják meg a feladatot. A módszer hátránya, hogy csak az egyszerűbb feladatokra alkalmazható. Az általunk ajánlott módszerrel tetszőlegesen nehéz feladat megoldható néhány alapösszefüggés gépies alkalmazásával, és az esetleg felmerülő nehézségek csak matematikai természetűek lehetnek. A módszert példákon fogjuk bemutatni. Az első csoportba tartoznak a statikai feladatok: merev testek megadott rendszerében keressük a testek között ható erőket. Természetesen a rendszer paraméteresen is megadható, és a paraméter bizonyos értékeit keressük (ilyen lesz az első példa).

1. példa. *Súrlódásmentes talajon vízszintes helyzetű hengert rögzítünk. Milyen maximális α szöget zárhat be az elég hosszú, nyugalomban levő deszka, ha a henger és a deszka közötti súrlódási együttható μ (l. az 1. ábrát)? Számítsuk ki a reakcióerőket is!*



1. ábra

Megoldás. Legyen a deszka hossza l, súlya hosszegységenként γ, a henger sugara r. A deszka nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője nulla. Két helyen hat a deszkára reakcióerő: az A és a B pontban. Az A pontban súrlódás nélkül érintkezik a talaj és a deszka vége, vagyis a köztük levő kölcsönhatás csak a talajra merőleges lehet. A deszkára itt a P_1 erő hat. A B pontban nem ismerjük a kölcsönhatás irányát, ezért két egymásra merőleges P_2 és P_3 komponensét tekintjük ismeretlennek. A deszkára hat még a súlypontjában az $l \cdot \gamma$ nagyságú súlyerő.

Azt, hogy ezen erők eredője nulla, csak vektoregyenlettel lehetne felírni, ehelyett inkább azt írjuk fel, hogy az erők vízszintes és függőleges komponenseinek eredője külön–külön nulla:

$$P_1 + P_2 - l \cdot \gamma = 0; \quad P_3 = 0.$$

Ez két egyenlet, de három ismeretlen van: P_1, P_2 és P_3. A hiányzó egyenlet felírásánál azt használjuk fel, hogy a deszkára ható erők forgatónyomatékainak összege bármely pontra nulla. A legegyszerűbb esetet keressük meg: az egyenletet a B pontra írjuk fel, ugyanis erre a pontra a P_2 és P_3 erők nyomatéka nulla $\Big(\overline{AB} = r \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ és $\overline{BC} = r \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - l/2$, az erők karja $\overline{AB} \cdot \cos\alpha$ és $BC \cdot \cos\alpha\Big)$:

$$l \cdot \gamma \left(r \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{l}{2}\right) \cdot \cos\alpha - P_1 \cdot r\,\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Az α paraméter, egyelőre ismertnek tekintjük. Tehát megkaptuk a háromismeretlenes egyenletrendszert, melynek megoldása:

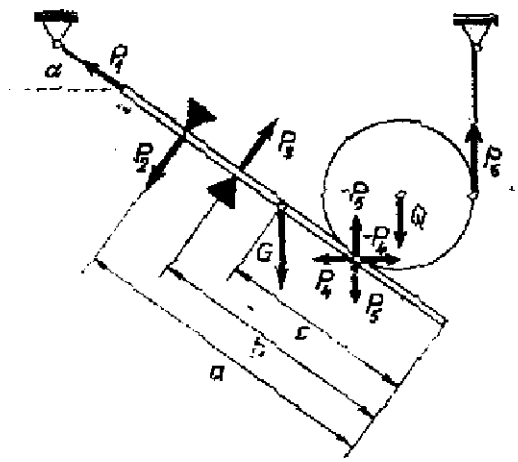
$$P_1 = l \cdot \gamma \left(1 - \frac{l}{2r}\mathrm{ctg}\frac{a}{2}\right); \quad P_2 = \frac{l^2\gamma}{2r} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}; \quad P_3 = 0.$$

A súrlódás részletesebb megvizsgálásához számítsuk ki a P_2 erőnek az érintkező felületre merőleges és azokkal párhuzamos P_N és P_S komponensét: $P_N = P_2 \cdot \cos\alpha$ és $P_S = P_2 \cdot \sin\alpha$. Ha $P_S = \mu P_N$, vagyis $\mu = P_S/P_N = \mathrm{tg}\alpha_0$, akkor éppen maximális szögben hajlik a deszka, hiszen ha $\alpha > \alpha_0$, akkor $P_S > \mu P_N$, ami lehetetlen – a deszka lejjebb csúszik, viszont ha a $a \leqq a_0$, akkor $P_S \leqq \mu P_N$ – a deszka nyugalomban marad.

A megoldás során kihasználtuk azt, hogy a C pont, a deszka súlypontja az A és a B pont között van, vagyis a deszka nem túl hosszú. Ha ez nem teljesül, akkor a maximális szöget akkor kapjuk, ha a C pont egybeesik a B ponttal, ugyanis ha a B másik oldalára kerül, akkor a deszka átbillen. Ha B és C egybeesik, akkor $P_1 = 0$, $P_2 = l \cdot \gamma$, $P_3 = 0$ és $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2r/l$ teljesül a maximális szögre.

A megoldás menete tehát a következő: Az ábrán felrajzoljuk azokat az erőket, amelyek a testekre hatnak (tehát nem az ellenerejüket). Ezután felírjuk mindegyik testre, hogy a rájuk ható vízszintes és függőleges erők eredője nulla. Felírjuk minden egyes testre – tetszőleges pontra – a forgatónyomatékok egyensúlyát. Így annyi egyenletet kapunk, ahány ismeretlen van. (Ha kevesebbet kapnánk, akkor ez azt jelenti, hogy a feladat statikailag határozatlan.) A kapott egyenletrendszert megoldva nyerjük a keresett erőket, és ezzel a feladatot lényegében megoldottuk.

Kövessük végig egy másik példa megoldásán ezt a módszert!



2. ábra

2. példa. *A 2. ábrán látható elrendezésben a G súlyú deszka súrlódásmentesen van megtámasztva két helyen, a felső végén a lecsúszás ellen kötéllel van rögzítve, és az alsó részére támaszkodó Q súlyú és r sugarú hengerre csavart fonál függőlegesen halad felfelé. A henger és a deszka közötti súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy csúszás ne következzen be. Számítsuk ki a kötélerőket és a két támasznál levő reakcióerőt!*

Megoldás. Rajzoljuk fel a deszkára ható erőket: a kötél húzza P_1 erővel, az első és a második támasz P_2 és P_3 erővel nyomja a felületre merőlegesen (súrlódás nincs), a súlyerő függőlegesen hat a súlypontban. A henger hatásának irányát nem ismerjük, ezért a P_4 és P_6 komponenseit rajzoljuk fel. A hengerre ható erők: a deszka hatása éppen ellentétes a hengernek a deszkára gyakorolt hatásával ($-P_4$ és $-P_5$), a súlyerő függőlegesen hat és a P_6 erő kötélirányú.

Írjuk fel a deszkára ható erők vízszintes és függőleges komponenseinek összeget:

$$P_1 \cdot \cos\alpha + P_2 \cdot \sin\alpha - P_3 \sin\alpha + P_4 = 0$$
$$-P_1 \cdot \sin\alpha + P_2 \cdot \cos\alpha - P_3 \cdot \cos\alpha + G + P_5 = 0.$$

Hasonlóképpen a hengerre is felírjuk az erők egyensúlyát:

$$-P_5 + Q - P_6 = 0; \quad -P_4 = 0.$$

Továbbá felírjuk azt, hogy a deszkára ható erők forgatónyomatékainak összege az A pontra nulla:

$$-a \cdot P_2 + b \cdot P_3 - c \cdot G \cdot \cos\alpha = 0.$$

Szintén az A pontra felírjuk a hengerre ható erők nyomatékainak összégét:

$$Q \cdot r \cdot \sin\alpha - P_6 \cdot r(1 + \sin\alpha) = 0.$$

Így már megoldható az egyenletrendszer. A megoldás a következő:

$$P_1 = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\big[G(1+\sin\alpha) + Q\big]; \quad P_2 = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \cdot \frac{G(1+\sin\alpha)(b-c) + bQ}{a-b};$$
$$P_3 = \frac{\cos\alpha}{1+sin\alpha} \cdot \frac{G(1+\sin\alpha)(a-c) + a \cdot Q}{a-b}; \quad P_4 = 0;$$
$$P_5 = Q \cdot \frac{1}{1+\sin\alpha}; \quad P_6 = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

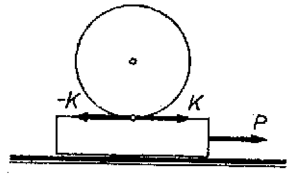
A deszka és a henger közötti kölcsönhatás $P_4 = 0$ miatt függőleges irányú és P_5 nagyságú. Ezzel a feladatot megoldottuk – a látszólag bonyolult példa megoldása során semmilyen nehézség nem lépett fel.

A dinamikai feladatok másik csoportjába a kinetikai példák tartoznak. Ezeknél néhány merev test vagy tömegpont, a köztük levő kényszerek (kötél, lejtő stb.) és a rájuk ható erők (gravitációs, súrlódási erők stb.) adottak. Feladat a magára hagyott rendszer mozgásának leírása (általában elég a magára hagyott rendszer gyorsulását kiszámítani).

3. példa. *M tömegű, $2l$ hosszúságú hasáb közepén m tömegű golyó nyugszik. A nulla időpillanattól kezdve t ideig a hasábra állandó P húzóerő hat. Ekkor az erőhatás megszűnik. Az alaplap és a hasáb közötti súrlódás elhanyagolható. A golyó és a hasáb közötti csúszó súrlódás biztosítja, hogy a golyó meg ne csússzék, hanem gördüljön. Mekkora T idő múlva esik le a hasábról? (Mikor éri el a golyó a hasáb szélét?) A golyó gördülő ellenállása elhanyagolható.*

(Az 1963. évi középiskolai fizikai tanulmányi verseny II. fordulójának 3. feladata. Megoldással együtt megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok 1963. évi 7. számában a 86. oldalon.)

Megoldás. Azt mindjárt látjuk, hogy a példa lényegileg megoldottnak tekinthető, ha az egyes gyorsulásokat és a golyó szöggyorsulását kiszámítjuk. Ennek érdekében írjuk fel mindkét testre a mozgásegyenletet! A hasáb gyorsulása legyen A, a golyóé a – külső koordinátarendszerből nézve. A golyó szöggyorsulása legyen β, valamint a golyó és a hasáb közötti kölcsönhatás legyen K nagyságú erő. A hasábra ható erők éppen a gyorsítóerőt adják. Hat rá a P erő és a golyó $-K$ hatása: $MA = P - K$.



3. ábra

A golyóra csak a K erő hat: $m \cdot a = K$.

Most felírjuk a golyó forgásának egyenletét: a rá ható forgatónyomatékok összege egyenlő a tehetetlenségi nyomaték és a szöggyorsulás szorzatával: $\Theta \cdot \beta = K \cdot r$, ahol $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$ a golyó tehetetlenségi nyomatéka és r a golyó sugara. Ez eddig három egyenlet, és az ismeretlenek száma négy. A negyedik egyenletet a kényszerfeltétel adja meg (tehát az, hogy a golyó nem csúszhat a hasábon). Amíg a golyó x utat tesz meg és α szöggel elfordul, addig a hasáb X utat tesz meg, vagyis $a \cdot r + x = X$. Azonban $\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot t^2$, $x = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ és $X = \frac{1}{2}A \cdot t^2$, tehát a negyedik egyenlet: $\beta r + a = A$.

Az egyenletrendszer megoldása:

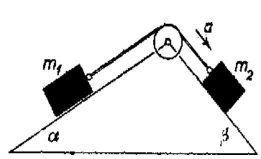
$$a = \frac{P}{M\left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M}\right)}; \quad A = \frac{\frac{7}{2}P}{M\left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M}\right)}; \quad \beta = \frac{\frac{5}{2}P}{M\left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M}\right)}.$$

Ezen adatok ismeretében a kérdésre már könnyen válaszolhatunk.

A megoldás menete tehát a következő: Minden gyorsuló mozgást végző testre felírjuk az $m \cdot a = \Sigma P$ mozgásegyenletet és minden forgó mozgást végző testre a $\Theta\beta = \Sigma M$ mozgásegyenletet. (M itt forgatónyomatékot jelöl!): Az egyenletrendszer többi egyenletét a kényszerfeltételek megadásával kapjuk meg.

Kissé bonyolultabb a helyzet akkor, ha a súrlódást nem hanyagolhatjuk el. Ha csúszó súrlódás van, akkor azt tudjuk, hogy a mozgás sebességével ellentétes irányú súrlódási erő μN, ahol μ a súrlódási együttható és N a felületeket összenyomó erő. Ilyen feladatok esetén figyelembe kell venni a kezdeti feltételeket is, ugyanis a gyorsulás függ a sebesség irányától. (Például valamely lassuló mozgásnál a súrlódási erő a gyorsulás számértékét növeli, a megállás után, amikor a test már visszafelé mozog, a súrlódási erő irányt változtat és a gyorsulás számértékét csökkenti.) Ha tapadó súrlódás van, akkor a súrlódási erőnek nem ismerjük a nagyságát, csak azt tudjuk róla, hogy kisebb, mint μN. Ekkor azonban fel tudunk írni egy kényszeregyenletet a felületek tapadására (a 3. példában ez előfordult). Ha olyan példát kapunk, amelyben súrlódás is szerepel, rendszerint azzal a feltevéssel oldjuk meg, hogy kezdetben a rendszer nyugalomban volt. Ekkor először, hogy a súrlódási erők irányát megtudjuk, meghatározzuk a sebességek irányát (a sebesség irányával mindig ellentétes irányú a súrlódási erő). Ez úgy történik, hogy a súrlódás elhanyagolásával felírjuk a mozgásegyenleteket és a kényszeregyenleteket, és megoldjuk azokat. Ha a súrlódás már nem elhanyagolható, akkor legfeljebb csökken a mozgás gyorsulása, illetve sebessége, de az irányukon ez nem változtathat. Miután ismerjük a súrlódási erő irányát (és nagyságát is), felírjuk a végleges egyenletrendszert. Ha ennek megoldása az előző gyorsulással ellentétes irányú gyorsulást ad meg, akkor a helyes megoldás az, hogy a nagy súrlódás miatt a test nem indul meg. (Ha a súrlódási együtthatót növeljük, a lejtőn lecsúszó test nem indul el fölfelé, legfeljebb megáll.)

Nézzük meg egy olyan példa megoldását, amelyben csúszó súrlódás szerepel!



4. ábra

4. példa. *A 4. ábrán látható összeállításban a súrlódási együttható* $\mu = 0{,}1$, $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 15$ kg, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, *a kötél ideális, igen jól csúszik a csigán. Számítsuk ki a K kötélerőt és a gyorsulást!*

Megoldás. Vegyük fel a gyorsulás irányát a nyíl szerint. A mozgásegyenletek a súrlódás figyelmen kívül hagyásával:

$$m_1 a = K - m_1 g \sin\alpha,$$
$$m_2 a = -K + m_2 g \sin\beta.$$

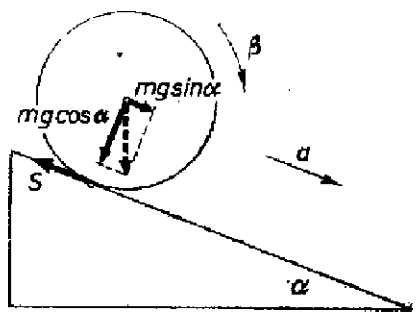
Az egyenletrendszer így megoldható, ugyanis a kényszerfeltételt akkor vettük figyelembe, amikor észrevettük, hogy mindkét test gyorsulása a. A megoldás: $a = g \cdot \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} \approx 9{,}81 \cdot \frac{2{,}12 - 1}{5} \frac{m}{\sec^2} > 0$, vagyis a pozitív irányt helyesen választottuk meg. Ezután már felírhatjuk a mozgásegyenleteket a súrlódás figyelembevételével:

$$m_1 a = K - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha,$$
$$m_2 a = -K + m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta.$$

A megoldás: $a = 12{,}7\ \mathrm{cm/sec}^{-2}$, vagyis pozitív érték. Ha a súrlódási együttható pl. 0,5 lenne, akkor a gyorsulásra már negatív értéket kapnánk, a két test nem mozdulna meg.

A következő feladatban tapadási súrlódás szerepel.

5. példa. *α hajlásszögű lejtőn m tömegű és r sugarú homogén korong gurul le. A súrlódási együttható μ. Mennyi lesz a korong gyorsulása?*



5. ábra

Megoldás. A korongra az $mg \sin\alpha$ és az S súrlódási erő hat. Az $mg\cos\alpha$ és a lejtő kényszerereje éppen kiegyenlítik egymást. A mozgásegyenletek:

$$m \cdot a = m \cdot g \sin\alpha - S,$$
$$\Theta\beta = S \cdot r.$$

A kényszerfeltétel a tapadás: $\beta \cdot r = a$.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{2}{3} g \cdot \sin\alpha;$$
$$S = \frac{1}{3} mg \sin\alpha;$$
$$\beta = \frac{2}{3} g \frac{\sin\alpha}{r}.$$

Ez azonban csak akkor igaz, ha $S \leqslant \mu \cdot mg\cos\alpha$. Az $S > \mu mg \cos\alpha$ már nem állhat fenn, ekkor $S = \mu \cdot mg \cos\alpha$, és a korong csúszni fog. A mozgásegyenletek:

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha,$$
$$\Theta \cdot \beta = \mu \cdot mg \cdot r \cdot \cos\alpha.$$

A kényszerfeltételt nem írjuk fel, mert megszűnt a tapadás. Az eredmény:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha); \quad \beta = 2\mu g \frac{\cos\alpha}{r}.$$

Major János

(A szerző köszönetet mond *Gaál István* tud. kutatónak, aki az itt ismertetett eljárás lényeges gondolatait az *Ifjúsági Fizikai Kör* ülésein több előadásban kifejtette.)