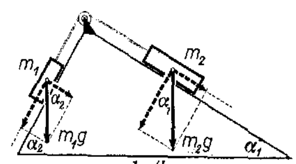
Az 1964. évi Eötvös Loránd fizikai verseny

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 3-án rendezte ez évi fizikai versenyét Budapesten és 6 vidéki városban az idén érettségizettek számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. $60°$*-os és* $20°$*-os hajlásszögű lejtők egy élben találkoznak. Itt kicsiny, súrlódásmentes csigát helyezünk el. A csigán átvetett fonál végein* m_1 *és* m_2 *tömegű ládák függnek, amelyek csúszó súrlódási együtthatója* 0,2. *Milyen feltétel mellett maradnak a ládák nyugalomban?*

Megoldás. Az m_1 tömeg $m_1 g$ súlyának lejtő menti összetevője $m_1 g \sin\alpha_2$, lejtőre merőleges összetevője $m_1 g \cos\alpha_2$. A keletkezhető legnagyobb súrlódási erő $\mu m_1 g \cos\alpha_2$, ha μ-vel jelöljük a súrlódási együtthatót. Az m_1 tömegű láda leengedéskor $m_1 g \sin\alpha_2 - \mu m_1 g \cos\alpha_2$ erővel tartható egyensúlyban, viszont felhúzásához legalább $m_1 g \sin\alpha_2 + \mu m_1 g \cos\alpha_2$ erőt kell kifejtenünk (1. ábra).



1. ábra

Hasonlóképp az m_2 tömegű láda lecsúszik, hacsak nem tartjuk a fonalat legalább $m_2 g \sin\alpha_1 - \mu m_2 g \cos\alpha_1$ erővel és felfelé mozog, ha a jobboldali fonalat legalább $m_2 g \sin\alpha_1 + \mu m_2 g \cos\alpha_1$ erővel húzzuk felfelé, minden esetben a lejtő hosszával párhuzamosan. A fonállal összekötött ládák nem csúsznak balfelé, ha

$$m_1 g \sin\alpha_2 - \mu m_1 g \cos\alpha_2 \leqq m_2 g \sin\alpha_1 + \mu m_2 g \cos\alpha_1,$$

és nem csúsznak jobbfelé, ha

$$m_2 g \sin\alpha_1 - \mu m_2 g \cos\alpha_1 \leqq m_1 g \sin\alpha_2 + \mu m_1 g \cos\alpha_2.$$

Az m_1/m_2 hányadost mindegyikből kifejezve, g-vel egyszerűsítve adódik a nyugalom feltétele:

$$\frac{\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2} \leqq \frac{m_1}{m_2} \leqq \frac{\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2}. \tag{1}$$

Amennyiben a tömegviszony e két határ között van, a ládák nyugalomban maradnak.

Felhasználhatjuk a súrlódási határszög fogalmát. E súrlódási határszög az a szög,amelynek tangense egyenlő a súrlódási együtthatóval:

$$\mathrm{tg}\varepsilon = \mu = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}.$$

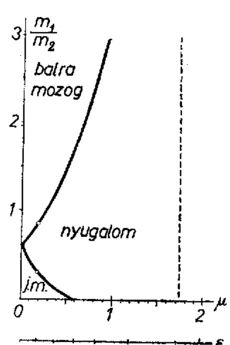
Behelyettesítve (1)-be és bővítve cos ε-nal:

$$\frac{\sin\alpha_1\cos\varepsilon - \cos\alpha_1\sin\varepsilon}{\sin\alpha_2\cos\varepsilon + \cos\alpha_2\sin\varepsilon} \leqq \frac{m_1}{m_2} \leqq \frac{\sin\alpha_1\cos\varepsilon + \cos\alpha_1\sin\varepsilon}{\sin\alpha_2\cos\varepsilon - \cos\alpha_2\sin\varepsilon}. \tag{2}$$

Goniometriai átalakítással:

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \varepsilon)}{\sin(\alpha_2 + \varepsilon)} \leqq \frac{m_1}{m_2} \leqq \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin(\alpha_2 - \varepsilon)}.$$

Ez az egyenlőtlenség fejezi ki általában a nyugalom feltételét.



2. ábra

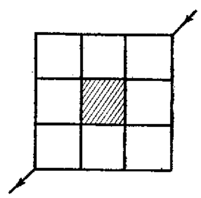
Ha mint feladatunkban is $\alpha_1+\alpha_2=90°$, akkor $\sin\alpha_2$ helyébe $\cos\alpha_1$ és $\cos\alpha_2$ helyébe $\sin\alpha_1$ tehető, és ezzel (2) így írható fel:

$$\frac{\sin\alpha_1\cos\varepsilon-\cos\alpha_1\sin\varepsilon}{\cos\alpha_1\cos\varepsilon+\sin\alpha_1\sin\varepsilon}\leqq\frac{m_1}{m_2}\leqq\frac{\sin\alpha_1\cos\varepsilon+\cos\alpha_1\sin\varepsilon}{\cos\alpha_1\cos\varepsilon-\sin\alpha_1\sin\varepsilon},$$
$$\frac{\sin(\alpha_1-\varepsilon)}{\cos(\alpha_1-\varepsilon)}\leqq\frac{m_1}{m_2}\leqq\frac{\sin(\alpha_1+\varepsilon)}{\cos(\alpha_1-\varepsilon)},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha_1-\varepsilon)\leqq\frac{m_1}{m_2}\leqq\operatorname{tg}(\alpha_1+\varepsilon).$$

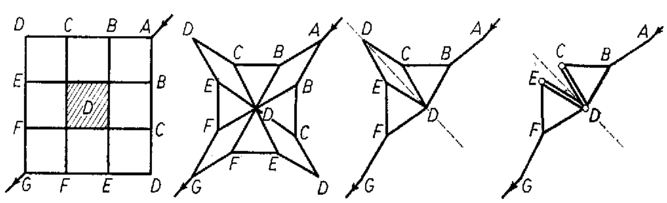
Ez az egyenlőtlenség fejezi ki legjobban az egyensúly feltételét feladatunk esetében. A feladat szövege szerint $\alpha_1=30°$. 2. ábránk az egyensúly két határa esetében érvényes tömegviszonyt ábrázolja e szögnél mint a μ súrlódási együttható függvényét. Ha a μ és m_1/m_2 tömegviszony által feltüntetett pont a felső görbe felett van, akkor a ládák balra mozognak, ha pedig az alsó görbe alatt, akkor jobbra. A két görbétől jobbra fekvő terület jelzi azon m_1/m_2 és μ értékpárokat, amelyek mellett nyugalom van. Ha $\alpha_1=30°$ és $\mu=0{,}2$, akkor a nyugalom feltétele:

$$0{,}338\leqq\frac{m_1}{m_2}\leqq0{,}879.$$

2. *Kilenc négyzetből álló hálózat mindegyik éle R ohm ellenállású. A középső négyzetes mező helyébe tökéletesen vezető négyzetlapot teszünk. Mennyi az eredő ellenállás a négyzet két átellenes csúcsa között?* (3. ábra)



3. ábra



4. ábra

Megoldás. A tökéletesen vezető négyzetlaphoz csatlakozó ellenállások egyetlen D pontban egyesíthetők (4. ábra első és második rajza). A vezetékhálózatot ferde átlójánál fogva kettévágjuk. Észrevesszük, hogy szimmetriaokokból a D betűvel jelölt pontok közös potenciálon vannak (4. ábra harmadik és negyedik rajza); ezeket a pontokat egybeejtjük. A 4. ábra negyedik rajzán látható hálózat AD részén először is C, B között R ohm és C, D között $R/2$ ohm sorba van kapcsolva, ami $3R/2$ ohmot ad, azután ez a D, B közötti R ellenállással párhuzamosan van kapcsolva, így a BD rész teljes ellenállása:

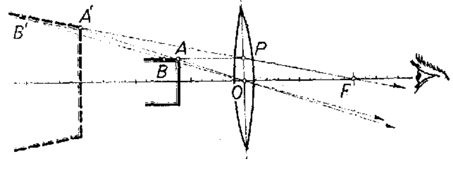
$$\frac{\frac{3R}{2}\cdot R}{\frac{3R}{2}+R}=\frac{3}{5}\cdot R.$$

Ehhez kapcsoljuk sorba az A, B közötti R ohmot, ami $3R/5+R=8R/5$ ohmot ad. DG között ugyanennyi az ellenállás, viszont az ábrán látható hálózattal párhuzamosan van kapcsolva az átló alatt egy ugyanilyen alakzat, tehát az eredő ellenállás:

$$\frac{8}{5}\cdot R=1{,}6R.$$

3. *Egy gyűjtőlencsét szemünkhöz közel helyezünk el úgy, hogy egy hengeres formájú parafadugó homlokfelületét a tisztán látás távolságában élesen látjuk. A dugó és lencse kölcsönös távolságát rögzítve elhelyezhetjük-e szemünket úgy, hogy a dugó palástfelületét is lássuk? A henger hossztengelye és a szem tengelye mindig a lencse tengelyében legyen.*

(Pócza Jenő)



5. ábra

Megoldás. A feladat szövegéből következik, hogy a dugó homlokfelületének virtuális képét nézzük (5. ábra). A homlokfelület A pontjának képét AP tengellyel párhuzamos fénysugárral (amelynek folytatása PF fókuszon átmenő sugár) és AO középponton átmenő sugárral szerkesztjük meg. A virtuális kép A'-ben keletkezik. Keressük most a hengerpalást alkotójának B pontjához tartozó képpontot. Az egyik szerkesztő sugár most is AP, a másik BO, és a kép helye a B' pont. Látható, hogy a henger AB alkotójának virtuális képe $A'B'$ egyenes, amelynek folytatása átmegy a lencse F fókuszán. A lencsét úgy hagyják el a sugarak, mintha a dugó és lencse helyett az $A'B'$ alkotójú (világító) csonka kúp volna jelen, lencse nélkül. Rögtön nyilvánvaló: akkor látunk rá e csonka kúp palástjára, ha szemünket a gyújtóponton kívül helyezzük el. Tehát a feladat megoldása: szemünket a fókuszponton kívül kell elhelyezni. Természetesen szükséges feltétel még, hogy a lencse átmérője nagyobb legyen, mint a dugó alapkörének átmérője.

A verseny eredménye. I. díjat nyert *Corradi Gábor* (a győri benedekrendi gimnáziumban Grabner Oszvald tanítványa), II. díjat nyert *Doskar Balázs* (a budapesti Piarista Gimnáziumban Havas József, Szoboszlay András és Varga László tanítványa), III. díjat nyert *Lakó Ferenc* (a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnáziumban Kozma Péter tanítványa). Dicséretet kapott *Petrányi Gyula* (a debreceni gyakorló gimnáziumban Dr. Nagy László és Dr. Nagy Lászlóné tanítványa). A versenyen kívül részt vevő középiskolai tanulók közül dicséretet kaptak *Pelikán József* (a budapesti Fazekas gimnázium III. osztályában Wiedemann László és Szalay Béla tanítványa) és *Antos György* (a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnázium IV. osztályában Petyerity Géza tanítványa).