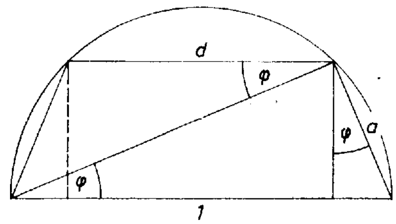
A kúp tengelymetszete trapéz, mely a félgömbből kimetszett félkörbe van beleírva, a trapéz hosszabbik párhuzamos oldala a félkör átmérője. Ezt választjuk hosszegységnek és a csonka kúp a oldalvonalát és kisebbik alapjának d átmérőjét – a trapéz szárát és rövidebb párhuzamos oldalát – kifejezzük az átló és a párhuzamos oldalak közti φ szöggel:

$$a = \sin\varphi = t, \quad d = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - 2t^2, \quad \text{ahol} \;\; t = \sin\varphi.$$



Ezekkel a csonka kúp felszínének változó része (az alsó alapkör állandó területét mindjárt elhagyva)

$$F = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi + \frac{\pi + d\pi}{2} \cdot a,$$

és célszerű lesz a következő függvényt vizsgálnunk:

$$y = \frac{F}{\pi} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - t^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - t^2)t = t^4 - t^3 - t^2 + t,$$

ahol

(1) $$0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (< 0{,}7072), \quad \text{hiszen} \quad 0 < \varphi < 45^\circ.$$

Ennek ugyanis ugyanazon t-nél vannak a szélső értékei (az értelmezési tartományban) mint F-nek és ugyanolyan jellegűek.

Képezzük a deriváltat és keressük az értelmezési tartományba eső zérushelyeit:

$$y' = 4t^3 - 3t^2 - 2t + 1.$$

Egyik zérushelye $t = 1$ (nem esik (1)-be), hiszen az együtthatók összege 0. A megfelelő $t - 1$ gyöktényezőit kiemelve

(2) $$(4t^3 - 4t^2) + (t^2 - t) - (t - 1) = (t - 1)(4t^2 + t - 1),$$

a további két zérushelyet tehát a $4t^2 + t - 1 = 0$ egyenlet gyökei adják. Ezek valósak és szorzatuk $-1/4$, eszerint egyikük negatív, tehát az is kívül esik (1)-en. A pozitív gyök viszont benne van (1)-ben:

$$t_0 = \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{17}) = 0{,}3904, \qquad \varphi_0 = 22^\circ 58{,}7',$$

csak itt lehet szélső értéke y-nak (és F-nek).

Megmutatjuk, hogy t_0-ban maximum van, ehhez y'-nek (2) alatti második alakját használjuk föl. Az első tényező (1)-nek minden helyén negatív, a második pedig $0 < t < t_0$ esetén (a másodfokú egyenlet két gyöke között) negatív, hiszen a másodfokú tag együtthatója pozitív, a $t_0 < t \leq 1/\sqrt{2}$ értékekre pedig pozitív. Így az előbbi rész-intervallumban $y' > 0$, a függvény nő, az utóbbiban $y' < 0$, a függvény fogy, és ez állításunkat bizonyítja.

A talált maximum-helyen a csonka kúp alkotója és fedőkörének átmérője

$$a = t_0 = \frac{\sqrt{17} - 1}{8} = 0{,}390, \qquad d = 1 - 2t_0^2 = \frac{7 + \sqrt{17}}{16} = 0{,}696,$$

a teljes felszín pedig (a félgömb főkörét is beszámítva)

$$\frac{\pi}{512} \cdot (149 + 51\sqrt{17}) = \pi \cdot 0{,}702 = 2{,}20 \quad \text{területegység.}$$

Gál Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)