I. megoldás. Minthogy a leírt (első) szerkesztéssel egy, magán az AB egyenesen fekvő pontot jelölünk ki, azért lényegtelen, hogy a trapézt az AB oldal fölé kifelé vagy befelé szerkesztjük.

Látni fogjuk, hogy C^* azonos az ABC háromszög C-ből induló magasságának C_1 talppontjával, és a betűzés kellő megváltoztatásával hasonló állítás adódik A^*-ra és B^*-ra. Ebből következik, hogy a C^*, A^*, B^* pontokban felállított merőlegesek a háromszög magasságvonalai, tehát az állítás igaz, és élesebben ezt mondhatjuk: a merőlegesek a háromszög magasságpontjában metszik egymást. A mondott azonossághoz elég azt megmutatni, hogy C_1 egyenlő távolságra van A''-től és B'től: Valóban, az $A''C_1A$, CAC_1, CBC_1 és $B'C_1B$ derékszögű háromszögek, valamint a föltevések alapján

$$\begin{aligned} A''C_1^2 &= A''A^2 + AC_1^2 = BC^2 + (-CC_1^2 + AC^2) = \\ &= (BC^2 - CC_1^2) + B'B^2 = BC_1^2 + BB'^2 = B'C_1^2, \end{aligned}$$

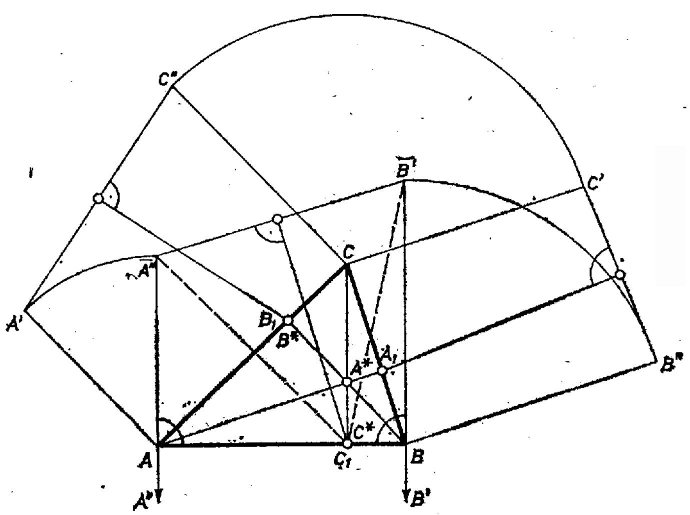
tehát, mivel puszta távolságokról van szó, $A''C_1 = B'C_1$.

Meggondolásunk akkor is érvényes, ha C_1 azonosnak adódik A-val vagy B-vel. Ezzel az előrebocsátottak szerint az állítást bebizonyítottuk.

Hadik Róbert (Makó, József A. Gimn., IV. o. t.)

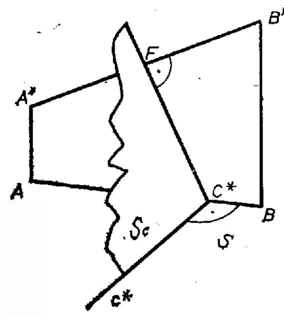
II. megoldás. Térbeli meggondolással a feladat állításánál többet bizonyítunk be.

Szerkesszük a három trapézt az ABC háromszög oldalai fölé kifelé, ekkor az előírásokból adódó $AA' = AA''$, $BB' = BB''$, $CC' = CC''$ egyenlőségre tekintettel a trapézok és a háromszög együttes alakzata felfogható, mint egy (ferdén) elmetszett (egyenes) hasáb egyik része papírmodelljének kiterített hálózata, a metszetidom nélkül. Ugyanis az $ABB'A''$ trapézt AB mint tengely körül és az $ACC''A'$ trapézt AC körül forgatva az AA'' egyenes abban a síkban mozog, amely merőleges AB-re és átmegy A-n, az AA' pedig abban, amely merőleges AC-re és átmegy A-n. E két sík egyetlen közös egyenese az A-ban a háromszög S síkjára állított merőleges (mert A-n át ez az egyetlen olyan egyenes, amely AB-re is, AC-re is merőleges), és ha AA'-t is, AA''-t is ebben az egyenesben megállítjuk, az $AA' = AA''$ egyenlőség alapján A' és A'' egy A_1 pontban találkozik, tehát $AA_1 \perp S$. Ugyanígy B' és B'' egy B_1 pontban, C' és C'' egy C_1 pontban találkozik, és $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, ezek a mondott hasáb oldalélegyenesei és a mondott metsző sík az $A_1B_1C_1$ sík.



1. ábra

Azt állítjuk, hogy az S síkban, a C^* pontban az AB egyenesre állított c^* merőleges egyenes azonos az A_1B_1 szakasz S_c felező merőleges síkjának S-sel való metszésvonalával. Ehhez belátjuk, hogy c^* merőleges A_1B_1-re.



2. ábra

S_c merőlegesen áll minden olyan síkra, amely tartalmazza az A_1B_1 egyenest, köztük az A_1AB síkra. Az utóbbira merőleges maga S is, tehát S_c-nek és S-nek c^{**} metszésvonala is. Így c^{**} merőleges AB-re, benne van S-ben és nyilvánvalóan átmegy C^*-on, tehát azonos c^*-gal, amint állítottuk.

Ugyanígy az (S síkban) A^*-ban BC-re merőlegesen állított a^* egyenes a B_1C_1 szakasz felező merőleges síkjának, a B^*-ban CA-ra merőlegesen állított b^* egyenes a C_1A_1 szakasz felező merőleges síkjának S-sel való metszésvonala.

Megmutatjuk, hogy a három felező merőleges sík egy egyenesben metszi egymást. Ugyanis A_1B_1 és B_1C_1 felező merőleges síkjának minden pontja egyenlő távolságra van A_1-től és B_1-től, ill. B_1-től és C_1-től, ezért e két sík t metszésvonalának minden pontja egyenlő távolságra van A_1-től, B_1-től és C_1-től, tehát t benne fekszik az A_1C_1 szakasz felező merőleges síkjában is.

Így pedig t és S közös L pontja rajta van c^*, a^* és b^* mindegyikén; ezzel az állítást bebizonyítottuk. Nem használtuk fel az AA_1, BB_1, CC_1 oldalélszakaszok hosszát, ezért az $AA' = AA'' = AA_1$ stb. egyenlőségi föltételek teljesülése esetén a kérdéses három merőleges egyenes mindig egy pontban metszi egymást, és ez az a pont, amely egyenlő távolságra van A_1, B_1, C_1 mindegyikétől.

Katona Endre (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)