Az $\frac{1}{u^2}$ függvény nincs értelmezve az $u = 0$ helyen, ezért az (1) bal oldalán álló integrál közvetlenül csak pozitív x-re értelmezhető. Ez a függvény különben $\left(-\frac{1}{u}\right)$ deriváltja, így ha $x > 0$, akkor

$$\int_x^1 \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Hasonló módon kapjuk, hogy ha $y > 1$, akkor

$$\int_1^y \frac{1}{u^2}\,du = 1 - \frac{1}{y}. \tag{3}$$

Olyan, 1-nél nagyobb y-t keresünk, amelyre (3) egyenlő (2)-vel:

$$-1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y},$$

azaz

$$y = \frac{x}{2x-1}. \tag{4}$$

Ez akkor lesz 1-nél nagyobb, ha

$$\frac{x}{2x-1} > 1,$$

$$\frac{1-x}{2x-1} > 0.$$

Feladatunk szerint $x < 1$, ilyen x-re a tört számlálója pozitív, így a nevezőjének is pozitívnak kell lennie, tehát a vizsgált függvény csak akkor van értelmezve, ha $x > \frac{1}{2}$.

Ha mármost $\frac{1}{2} < x < 1$, akkor a függvény értelmezve van, és megadható a (4) összefüggéssel is. A függvény értelmezési tartománya ezek szerint az $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ nyílt intervallum.

Egy függvény értékkészlete azoknak a számoknak a halmaza, amelyekhez található olyan (az értelmezési tartományhoz tartozó) hely, ahol a függvény értéke az illető szám. Legyen tehát $y > 1$ tetszőleges, ez a szám akkor tartozik a vizsgált függvény értékkészletéhez, ha található hozzá olyan x, melyre $\frac{1}{2} < x < 1$ és (4) teljesül. Utóbbiból x-et kifejezve kapjuk, hogy

$$x = \frac{y}{2y-1}.$$

Ha $y > 1$, akkor egyrészt $2y - 1 > y$, tehát $x < 1$, másrészt $2y - 1 < 2y$, tehát $x > \frac{1}{2}$, így a függvény értékkészletéhez tetszőleges $y > 1$ valós szám hozzátartozik. Feladatunk szövege a többi számot eleve kizárta, így a függvény értékkészlete az $(1, \infty)$ nyílt félegyenes.

Az értelmezési tartomány bal végpontja az $x = \frac{1}{2}$ érték. Itt csak jobb oldali határértékről beszélhetünk; megmutatjuk, hogy ez létezik, és ∞-nel egyenlő. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges A számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \delta$, akkor $y > A$. Ha $A \leq 1$, tetszőleges $\delta > 0$ megfelel, ha $A > 1$, akkor az

$$\frac{x}{2x-1} > A$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ez $x > \frac{1}{2}$ mellett az

$$x < \frac{A}{2A-1}$$

számokra teljesül, így a

$$\delta = \frac{A}{2A-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2A-1)}$$

érték megfelelő. A vizsgált függvény jobb oldali határértéke tehát az $x = \dfrac{1}{2}$ helyen ∞.

Görbe Mihály (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Ha $x = \dfrac{1}{2}$, akkor (1) bal oldalának az értéke 1. Ugyancsak 1 a jobb oldal határértéke, ha $y \to \infty$. Általában értelmezhetjük egy $f(u)$ függvény integrálját nem korlátos intervallumon is, definíció szerint

$$\int_a^\infty f(u)\,du = \lim_{v\to\infty} \int_a^v f(u)\,du,$$

amennyiben ez a határérték létezik. Ennek megfelelően

$$\int_1^\infty \frac{1}{u^2}\,du = 1.$$