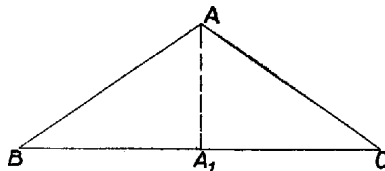


1. feladat. Legyen az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság A_1 talppontja a BC szakasz belső pontja. Mindig kisebb-e az AB és AC oldalak különbsége, mint az A_1B és A_1C szakaszok különbsége? (Indokolás)

Megoldás. A feltett kérdésre a válasz tagadó. Ennek igazolására elég egyetlen olyan példát mutatni, amelyben az állítás nem teljesül. Az állítás egyenlő szárú háromszögben nem teljesül, ha a meghúzott magasság a háromszög szimmetriatengelye. Legyen ugyanis az ABC háromszögben (1. ábra) $AB = AC$, így a különbségük nulla, másrészt A_1 felezi a BC alapot, tehát az A_1B és A_1C szakaszok különbsége is nulla. A szóban forgó két különbség tehát egyenlő.¹



1. ábra

2. feladat. Oldjuk meg x -re a következő egyenletet:

$$(1) \quad \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a és b milyen értékpárjainál hány megoldása van az egyenletnek.

I. megoldás. Az egyenletnek akkor van értelme, ha egyik tört nevezője sem nulla. Tegyük fel, hogy ez teljesül, azaz legyen $a \neq b$, $a \neq -b$, és x -nek csak a 0-tól különböző értékeit engedjük meg.

Gyűjtsük a bal oldalra az ismeretlent tartalmazó tagokat:

$$\frac{a+b}{x} - \frac{a-b}{x} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b},$$

majd hozzuk közös nevezőre a jobb oldalt is

$$(2) \quad \frac{2b}{x} = \frac{2b}{a^2 - b^2}.$$

A két egyenlő tört számlálója azonos. Ha ez nem nulla, akkor ebből következik, hogy a két nevező is egyenlő, vagyis

$$x = a^2 - b^2.$$

Csak azonos átalakításokat végeztünk, a kapott érték valóban gyöke az egyenletnek, mert feltevésünk miatt $x \neq 0$, és így az egyenlet x -nevezőjű tagjainak is van értelme.

Ha $b = 0$ (és így a feltevés szerint $a \neq 0$), akkor (2)-nek minden $x \neq 0$ szám eleget tesz, ugyanis (1) így alakul

$$(1a) \quad \frac{1}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a} + \frac{a}{x}.$$

Ezek szerint $a \neq b \neq 0$ és $a \neq -b$ esetén az egyenlet egyetlen megoldása $x = a^2 - b^2$; $a \neq b = 0$ esetén pedig minden szám megoldása az egyenletnek, kivéve $x = 0$.

II. megoldás. Szorozzuk meg az egyenletet $(a+b)(a-b)x$ -szel:

$$(a-b)x + (a+b)^2(a-b) = (a+b)x + (a-b)^2(a+b).$$

Tagokra bontás, rendezés majd kiemelés után

$$(3) \quad 2b(x + b^2 - a^2) = 0.$$

Es akkor áll fenn, ha legalább az egyik tényező nulla.

Ha $b \neq 0$, és a zárójelben levő kifejezés nulla, akkor

$$x = a^2 - b^2,$$

és ezt (1) két oldalába külön-külön behelyettesítve az

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{a^2 - b^2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{a^2 - b^2}$$

¹A kérdés további vizsgálatára egy cikkben visszatérünk. – Szerk.

kifejezéseket kapjuk. Ha ennek a két kifejezésnek van értelme, azaz ha $a \neq b$ és $a \neq -b$, akkor értékük egyenlő, vagyis $x = a^2 - b^2$ gyöke az egyenletnek. Ha $a = b$ vagy $a = -b$, akkor nincs megoldása az egyenletnek.

Ha $b = 0$, akkor (3)-ban a és x bármely értéket felvehet, kivéve a nullát, mert ekkor – mint (1a) mutatja – az eredeti egyenletnek nincs értelme.

3. feladat. Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:

(a) *Vannak Beatles-frizurás huligánok.*

(b) *Minden huligánnak nyegle a modora.*

Döntsük el és indokoljuk meg, hogy következnek-e ebből az alábbiak:

(c) *Van olyan nyegle modorú huligán, akinek Beatles-frizurája van.*

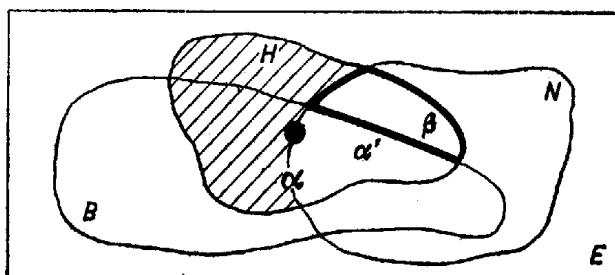
(d) *Minden nyegle modorú huligánnak Beatles-frizurája van.*

I. megoldás. A (c) állítás következik az (a) és (b) állításokból, mert (b) szerint minden huligánnak nyegle a modora, és így a Beatles-frizurás huligánok is nyegle modorúak – ha vannak –, azonban (a) szerint vannak.

Így (c)-nél valamivel több következik (a)-ból és (b)-ből, ugyanis (c) csak azt állítja, hogy van nyegle modorú, Beatles-frizurájú huligán, mi pedig beláttuk, hogy többen is vannak ilyenek.

A (d) állítás viszont nem következik az igaznak elfogadott állításokból, mert attól, hogy minden huligán nyegle modorú – amint (b) mondja –, és hogy így – (a)-t is figyelembe véve – vannak nyegle modorú, Beatles-frizurájú huligánok, még lehetnek olyan nyegle huligánok is, akiknek nincs Beatles-frizurájuk.

II. megoldás. Gondoljuk minden ember nevét egy-egy cédulára írva és e cédulákat egy E négyszög belsejében úgy elrendezve, hogy a nyegle modorúak, a huligánok, továbbá a Beatles-frizurások céduláit körülkeríthessük egy-egy N , H , ill. B vonallal. Ehhez N -nek ketté kell osztania E -t, H -nak N belsejét is, külsejét is, B -nek pedig az E tartományt így keletkezett mind a négy részét újra ketté kell vágnia (2. ábra). Miután egy-egy ember a mondott 3 tulajdonságból többel is rendelkezhet, a cédulákat a tartományokba úgy kell elhelyezni, hogy azoknak a tartományoknak a belsejében legyenek, amelyeknek megfelelő tulajdonsággal a név tulajdonosa rendelkezik, a többin pedig kívül.

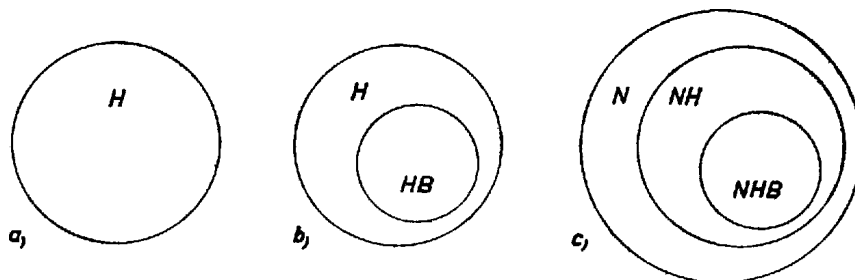


2. ábra

Az (a) állítás szerint a H és B görbék belsejének közös α részében vannak cédulák. Ezt a tényt egy a tartományba tett ponttal jelezzük. Mivel a tartományt N határa kettéosztja, és egyelőre nem tudjuk, hogy mindegyikbe jut-e cédula, és ha nem, melyikbe jut, így a pontot e határvonalra tettük. Viszont (b) szerint a H görbe belsejének az N -en kívüli része üres (az ábrán vonalkázva). Így az α részben levő cédulák csak a vonalkázatlan részben lehetnek, azaz N , H és B közös α' részében van cédula. Ez pedig éppen azt jelenti, amit (c) állít, tehát (c) következik az (a), (b) állítás-párból.

(d) azt jelentené, hogy N és H közös részének B -n kívüli β része üres lenne (vastag határvonal). Ez a rész nincs vonalkázva, tehát nem biztos, hogy üres, így (d) nem következik a feltételekből.

III. megoldás. Gyorsabban célhoz jutunk, ha az egyes tartományokat már az (a), (b) állítások figyelembevételével rajzoljuk meg. Képzeljünk minden huligánt a H görbe belsejébe (3/a ábra). Az (a) állítás szerint vannak Beatles-frizurájú huligánok, de nem biztos, hogy mind az: képzeljük a Beatles-frizurás huligánokat egy a H -ban levő HB görbe belsejébe (3/b ábra).



3. ábra

A (b) állítás szerint minden huligánnak nyegle a modora, viszont nem biztos, hogy minden nyegle modorú ember huligán, ezért a nyegle modorúak köré N görbét rajzolva ez a görbe magába zárja H -t (3/c ábra).

(c) következik (a)-ból és (b)-ből; mert az NHB görbébe képzelt emberek nyegle modorú Beatles-frizurás huligánok.

(d) nem következik a feltevésekből, mert H -nak a HB -n kívüli részében maradhattak huligánok, és ezek az NH -ban benne vannak, de az NHB -n kívül, tehát nyegle modorúak, de nincs Beatles-frizurájuk.