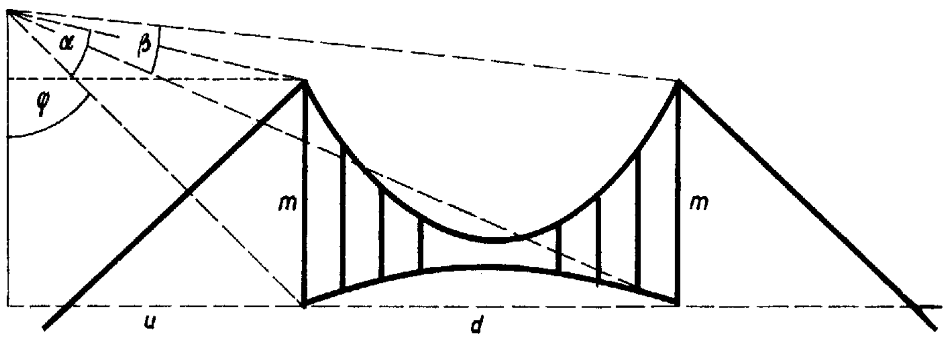
1. feladat. *A Gellérthegyen egy megfigyelő áll. Szeme abban a síkban van, amelyet az Erzsébet-híd két kapuzatának déli szélei határoznak meg. Az egyik kapuzat déli szélének függőleges élét (az úttesttől a legmagasabb pontig) α szög alatt látja, a másik kapuzatát pedig β szög alatt. Milyen magasan áll a megfigyelő a kapuzatok talppontján átmenő vízszintes sík fölött, ha a két kapuzat távolsága d méter és a figyelembe vett magasságuk m méter?* ($d = 290$ m, $m = 40$ m, $\alpha = 11{,}4°$, $\beta = 4{,}7°$.)



I. megoldás. Legyen a keresett magasság[1] h, a megfigyelő szemének merőleges vetülete a feladatban szereplő síkon legyen u távolságra a budai kapuzattól – jelöljük ennek látószögét α-val – és az ennek alsó végpontjához vezető látósugár zárjon be φ szöget a függőleges iránnyal. Ekkor

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{h},$$
$$\operatorname{tg}(\varphi+\alpha) = \frac{u}{h-m} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha} = \frac{u/h + \operatorname{tg}\alpha}{1-(u\operatorname{tg}\alpha)/h} = \frac{u + h\operatorname{tg}\alpha}{h - u\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ebből u-ra és h-ra a következő egyenlet adódik:

$$uh - u^2\operatorname{tg}\alpha = uh + h^2\operatorname{tg}\alpha - um - hm\operatorname{tg}\alpha,$$

vagy rendezve és $\operatorname{cotg}\alpha$-val szorozva

$$u^2 + h^2 - u\,m\operatorname{cotg}\alpha - h\,m = 0.$$

A pesti kapuzatra vonatkozóan ugyanilyen egyenlet adódik, csak α és u helyébe β és $u+d$ lép:

$$(u+d)^2 + h^2 - (u+d)\,m\operatorname{cotg}\beta - h\,m = 0.$$

A két egyenlet különbségét képezve meghatározható u és ezt ismerve az első egyenletből a keresett h magasság, mint az egyenlet pozitív gyöke:

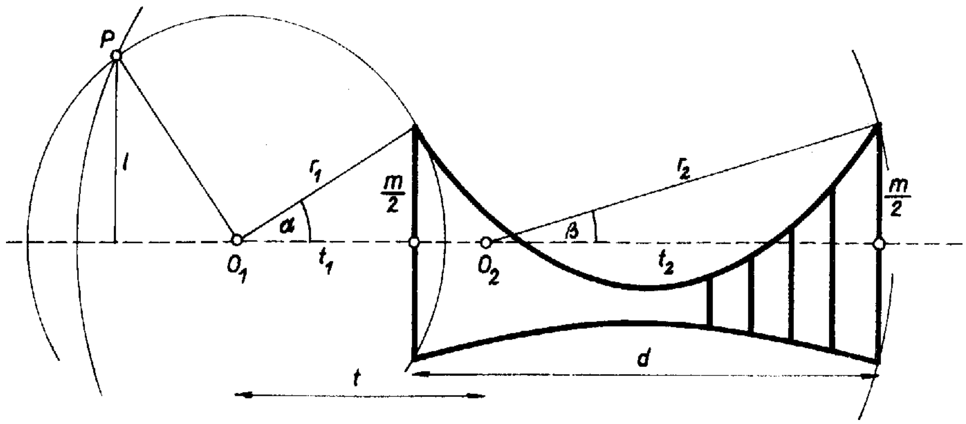
$$(u+d)^2 - u^2 - \big[u(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) + d\operatorname{cotg}\beta\big]\,m =$$
$$= u\big[2d - m(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha)\big] - d(m\operatorname{cotg}\beta - d) = 0,$$
$$u = \frac{d(m\operatorname{cotg}\beta - d)}{2d - m(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha)},$$
$$h = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + u\,m\operatorname{cotg}\alpha - u^2}.$$

Adataink közül csak a nagyobbik szög lehet a budai és a kisebb a pesti kapuzat látószöge, mert megcserélve a szögeket $m\cdot\operatorname{cotg} 11{,}4° < 40\cdot 5 = 200$ folytán u-ra negatív értéket kapnánk. A számításokat 4 jegyű függvénytáblázattal végezve

$$m\operatorname{cotg}\beta = 196{,}4, \qquad m(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) = 288,$$
$$2d - m(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) = 292,$$
$$\lg u = 2{,}2902, \quad u\,m\operatorname{cotg}\alpha = 38\,700,$$
$$(m/2)^2 = 400, \quad u^2 = 38\,050,$$
$$h = 20 + \sqrt{1050} = 52{,}4 \approx 52 \text{ m}.$$

(Mivel az adatok egy része csak 2 értékes jegyig ismert, az eredménynek is legfeljebb két jegye elfogadható.)

[1]Az ábrán h bejegyzése pótlandó.



II. megoldás. A megfigyelő P nézőpontja egyrészt rajta van azon a látószögköríven, amelyről a közelebbi kapuzat α szög alatt látszik, másrészt azon is, amelyikről a távolabbi β szög alatt látszik. Legyen a körök középpontja O_1, O_2, távolságuk a megfelelő kapuzattól t_1, ill. t_2, sugaruk r_1, ill r_2, P távolsága az O_1O_2 egyenestől l; ekkor a keresett magasság $m/2+l$. l-et mint az O_1O_2P háromszög magasságát határozzuk meg. Az oldalak kiszámíthatók: $O_1P=r_1$, $O_2P=r_2$, és $O_1O_2=t_1+d-t_2$; jelöljük az utóbbit t-vel. A középponti és kerületi szögek közti összefüggésből adódik, hogy r_1, t_1 és $m/2$ egy α hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög oldalai, r_2, t_2 és $m/2$ pedig egy β hegyesszöget tartalmazóé, így

$$r_1=\frac{m}{2\sin\alpha},\qquad r_2=\frac{m}{2\sin\beta},$$
$$t_1=\frac{m}{2}\operatorname{cotg}\alpha,\qquad t_2=\frac{m}{2}\operatorname{cotg}\beta,\quad t=d+t_1-t_2.$$

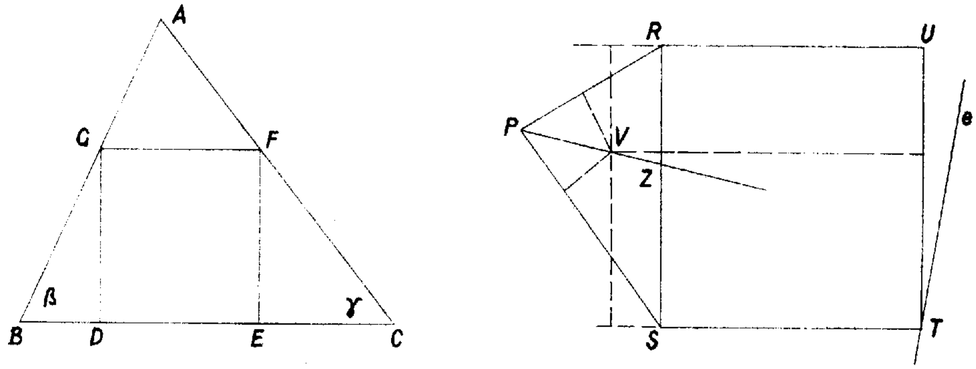
Mostmár a háromszög területét egyrészt az l magasság felhasználásával, másrészt Heron képletével kiszámítva és l-et kifejezve – ha $(r_1+r_2+t)/2$-t s-sel jelöljük –

$$l=\frac{2\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-t)}}{t}.$$

4 jegyű függvénytáblázatot használva $r_1=101{,}2$, $r_2=244{,}1$, $t=146$, $l=31{,}5$ adódik, így $h=51{,}5\approx 52$ m.

Megjegyzés. Adataink mellett $s-r_2=1{,}5$ adódik, tehát a számított 4-jegyű értékek utolsó két jegye játszik lényeges szerepet. Ebből érthető az eredmény pontatlansága, a két megoldásban kapott értékek eltérése.

2. feladat. *A hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.*



I. megoldás. Az ABC háromszögbe írt négyzet D és E csúcsa legyen a BC egyenesen, F és G pedig a CA, illetőleg AB egyenesen. Megmutatjuk, hogy a beírt kör középpontja nem lehet az AFG, BDG, CEF háromszögek egyikében sem. Mivel a középpont a belső szögfelezők metszéspontja, állításunk könnyen adódik a következő segédtételből.

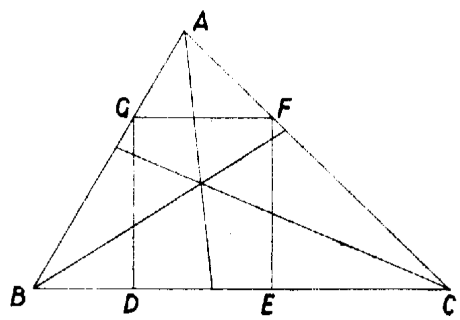
Ha egy PRS háromszög R-nél és S-nél levő szöge nem tompaszög, és az RS oldalra, annak ellenkező oldalán, mint amelyiken a háromszög van, $RSTU$ négyzetet rajzolunk, továbbá a T csúcson át egy e egyenest húzunk, amelyik nem metszi a négyzetet, akkor az RPS szög felezőjének a háromszögbe eső minden V pontja messzebb van e-től, mint a PR, PS egyenesektől. A $PRUTS$ ötszög a háromszög szögeire tett feltevés folytán konvex, így az egyenes teljesen rajta kívül fekszik, tehát V-t e bármely pontjával összekötő szakasz metszi az ötszög kerületét, tehát hosszabb valamelyik ötszögoldaltól való távolságnál. Ezek között viszont a PR, PS oldalaktól való (egyenlő) távolság a legkisebb, mert az

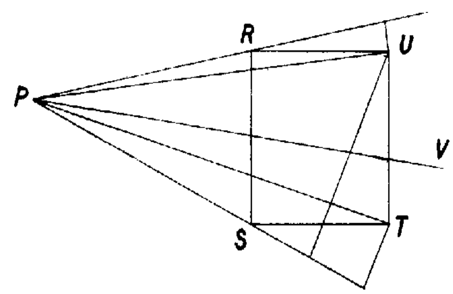
RU, ST oldalakra bocsátott merőleges metszi PR-t, illetőleg PS-t, tehát hosszabb a megfelelő oldaltól való távolságnál, a TU oldaltól való távolság viszont nagyobb a négyzetoldalnál, míg a PR, PS-től való távolság nem nagyobb, mint a szögfelező és az RS oldal Z metszéspontjának távolsága ezektől az egyenesektől, az pedig nem nagyobb a ZR, ZS kisebbikénél, s így nem nagyobb a négyzetoldal felénél.

Segédtételünk alkalmazható az AFG, BDG, CEF háromszögekre, ha az $ABC\sphericalangle = \beta$ és $ACB\sphericalangle = \gamma$ nem tompaszög, mert ekkor az AFG háromszög F-nél és G-nél levő szöge γ, illetőleg β, tehát nem tompaszög. A BDG és CEF háromszög, ha nem válik egyenesszakasszá, akkor derékszögű, és a közös oldalnak ellenkező oldalán van, mint a négyzet. Így a beírt kör középpontja nem lehet a szögfelezőknek a négyzeten kívüli részében, tehát a négyzetbe kell hogy essék.

Megjegyzés. Csak a négyzetoldalak melletti szögekről használtuk ki hegyesszög voltukat, így ha a beírt négyzet két csúcsa a legnagyobb oldalon van, az állítás minden háromszögre érvényes. Az állítás érvényessége a további megoldások bizonyításaiból is adódik, a III. megoldás esetében a megjegyzésbeli kiegészítéssel.

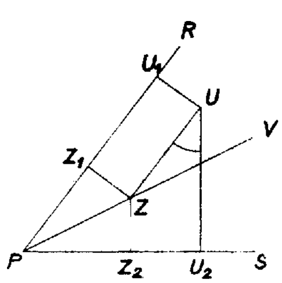
II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva azt mutatjuk meg, hogy mindegyik szögfelező a négyzet két szemközti oldalát metszi. Ebből következik, hogy a B-ből, illetőleg C-ből húzott szögfelező a CF, illetőleg BG szakaszon metszi a szemközti oldalt, így mindkettőnek a háromszögbe eső szakasza benne van a $BCFG$ trapézban, a harmadik szögfelezőnek a háromszögbe eső szakaszát viszont az $AGDEF$ ötszög tartalmazza, így metszéspontjuk a mindkét idom által fedett síkrészben, tehát a $DEFG$ négyzetben van.

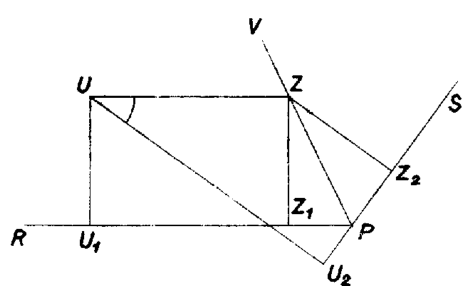




A három háromszög esetét ismét együtt tárgyalhatjuk. A PRS háromszög R-nél és S-nél levő szöge ne legyen tompaszög, rajzoljunk az RS oldalra, annak ellenkező oldalán, mint amelyiken a háromszög van, $RSTU$ négyzetet, és az RPS szög felezőjének egy pontja legyen V. A feltételekből következik, hogy U és T az RPS szögtartományban van.

A szögfelező pontjai egyenlő távol vannak a PR és PS egyenestől, az RPV szögtartomány pontjai az RP szárhoz, az SPV tartományéi az SP szárhoz vannak közelebb. Az U pont távolsága a PR egyenestől kisebb UR-nél, tehát a négyzet oldalánál. Másrészt U az RST szögtartományban van, tehát a belőle PS-re bocsátott merőleges metszi az RS vagy ST egyenest, s így már a négyzetbe eső szakasza legalább akkora, mint UR vagy UT, tehát mint a négyzet oldala. Így U az RPV szögtartományban van, és ugyanígy látható, hogy T az SPV szögtartományban van. Így a szögfelező az UPT szögtartományban van, tehát metszi az UT szakaszt, másrészt az RS szakaszt is, tehát a négyzet két átellenes oldalát. Ezt akartuk bizonyítani.

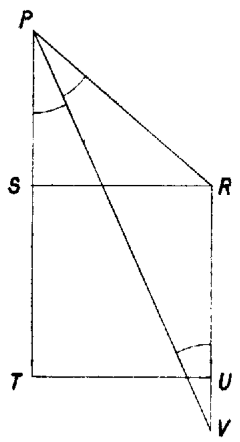


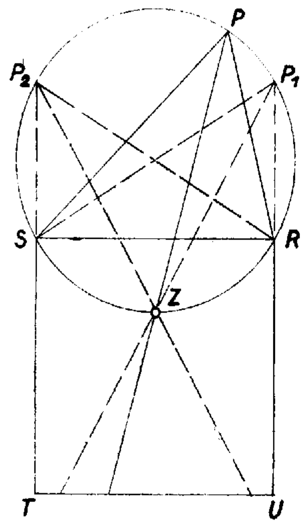


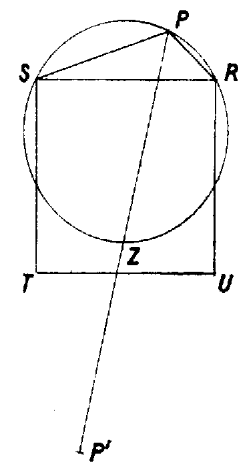
Megjegyzés. Felhasználtuk azt, hogy az RPV szögtartományban levő U pont közelebb van RP-hez, mint SP-hez. Ezt így láthatjuk be: Legyen U vetülete a PR, illetőleg PS egyenesen U_1, illetőleg U_2, az U-n át PR-rel párhuzamos egyenes metszéspontja a szögfelezővel Z, és ennek vetülete PR-en és PS-en Z_1 és Z_2. Ekkor egyrészt az U_1UZZ_1 téglalapból, és mert Z a szögfelezőn van, $UU_1 = ZZ_1 = ZZ_2$. Másrészt az $U_2UZ\sphericalangle$ hegyesszög (vagy $0°$), mert vagy U_2U fut a derékszögű U_1UZ szögtartományban (ha $RPS\sphericalangle > 90°$), vagy az U_1UU_2 szögtartomány tartalmazza UZ-t. Így az U_2UZZ_2 derékszögű trapézban (ami egyenesszakasszá is lapulhat) $UU_2 > ZZ_2 = ZZ_1 = UU_1$, és ezt akartuk bizonyítani.

III. megoldás. Hegyesszögű háromszögre bizonyítjuk az állítást a feladat szövegének megfelelően, az előző megoldás segédtételére adva új bizonyítást, ha RPS szög hegyesszög.

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha a háromszög S-nél derékszögű. Messe a P-ből húzott szögfelező az RU egyenest V-ben. A PRV háromszög egyenlő szárú, mert $RVP\sphericalangle = VPS\sphericalangle = VPR\sphericalangle$. Így $VR = PR > RS = RU$, vagyis V az RU oldal U-n túli meghosszabbításán van. A PV szakasz tehát az egymással szemben levő SR és TU oldalakat metszi.





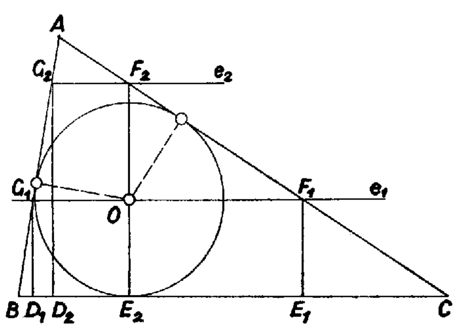


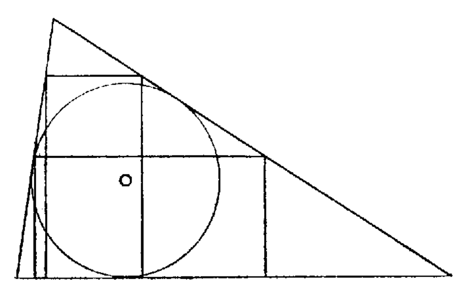
Ha R-nél és S-nél hegyesszög van a PRS háromszögben, akkor rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört. A P-ből húzott szögfelező ezt a P-t nem tartalmazó SR ív Z felezőpontjában metszi. Messe UR és TS meghosszabbítása a kört másodszor P_1-ben, illetőleg P_2-ben. Mivel a háromszög hegyesszögű, P a rövidebb P_1P_2 íven van. Az $SP_1R\sphericalangle$ és $SP_2R\sphericalangle$ felező egyenese is átmegy Z-n, és az előbbi szerint közrefogja a PZ szögfelezőt. Az első két szögfelező a föntebb tárgyalt speciális esetből adódóan a TU szakaszt metszi, tehát a köztük levő PZ szögfelező is, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Ha $SPR\sphericalangle \geq 90^\circ$, akkor pl. abból adódik a segédtétel helyessége, hogy Z nincs messzebb TU-tól, mint RS-től, s így P rá vonatkozó P' tükörképe a TU ellenkező oldalán van, mint P, és azzal együtt az RU és ST egyenesek közt fekszik.

IV. megoldás. Mozgassunk egy BC-vel párhuzamos e egyenest a BC oldaltól A felé, és bocsássunk az AB és AC oldallal való G és F metszéspontból minden helyzetben merőlegest BC-re. A keletkező beírt téglalap FG oldala a rá merőleges oldal növekedésével állandóan csökken.

Amig e elválasztja a beírt kör O középpontját és a BC oldalt, addig a téglalap magassága legfeljebb a beírt kör ϱ sugarát érheti el, viszont alapja nem kisebb az O-n átmenő egyenes háromszögbe eső szakaszánál, ami nagyobb 2ϱ-nál. A beírt négyzet tehát ezek közt a téglalapok közt nem szerepel.





Tovább mozgatva e-t, a téglalapok mindaddig tartalmazzák O-t, míg az az egyik BC-re merőleges oldalra nem kerül. Tartozzék ehhez a helyzethez a $D_2E_2F_2G_2$ téglalap, és essék O pl. az E_2F_2 oldalra. Ekkor $E_2F_2 > 2\varrho$, viszont $G_2F_2 \leq \varrho$, ugyanis az AB és AC oldalak érintkezési pontja a körrel az AG_2, ill. AF_2 szakaszok meghosszabbításán van (hiszen közelebb van BC-hez, mint 2ϱ), a G_2D_2 egyenes pedig a BAC szögtartományban halad, ha ABC szög és ACB szög nem tompa, így van közös pontja a körrel, tehát annak E_2F_2-re merőleges sugarával is. Így ez a téglalap sem négyzet, sem azok, amelyek e-nek A felé történő továbbmozgatásával keletkeznek.

Az ABC háromszögbe beírt, BC oldalon nyugvó négyzetnek ezek szerint az O-t belsejükben tartalmazó téglalapok közt kell lennie.

Megjegyzés. A többi megoldásból is kiolvasható, amit itt kimondtunk, hogy a négyzet a kör középpontját belsejében tartalmazza.

Az utolsó megoldás azt is adja, hogy a háromszögbe beírt fél-négyzetek – akár a BC-n nyugvó oldal fele a másiknak, akár a rá merőleges oldal – szintén belsejükben tartalmazzák a beírt kör középpontját. Ez könnyen leolvasható az első megoldásból is.

3. feladat. *Hét osztálytárs a bizonyítványosztás után megállapította, hogy nincs köztük kettő, aki mind a* 12 *tárgyból ugyanazt az osztályzatot kapta volna. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani a* 12 *tárgy közül* 6 *olyat, hogy ha csak az ebből a* 6 *tárgyból kapott osztályzatokat hasonlítjuk össze, akkor sincs a hét diák közt két olyan, aki mind a* 6 *tárgyból ugyanazt a jegyet kapta.*

I. megoldás. A kívánt 6 tárgyat kiválaszthatjuk a következő módon: Válasszunk ki 2 tanulót és egy tárgyat, amelyikből különböző jegyet kaptak. A feladat feltétele szerint ilyen tárgy van. Ezután egyenként veszünk hozzájuk a többi tanulókból, és választunk ki egy-egy tantárgyat.

Ha kiválasztottunk már k tanulót ($k = 2, 3, 4, 5$ vagy 6) és $k-1$ tárgyat úgy, hogy a k tanuló közül bármely kettőnek a $k-1$ tárgy valamelyikéből különböző osztályzata van, akkor egy $k+1$-edik tanulónak, mondjuk N-nek, ebből a $k-1$ tárgyból legfeljebb a k tanuló egyikével egyezhetnek meg az érdemjegyei. Ha van ilyen A tanuló, akkor feltétel szerint van olyan tárgy, amelyikből A-nak és N-nek különböző osztályzata van, kiválasztunk egyet. Ha ilyen tanuló nincs, akkor újabb tárgy kiválasztására nincs is szükség, de hozzávehetünk tetszés szerint egyet a már kiválasztottakhoz, és kaptunk a $k+1$ tanulóhoz k tárgyat a kívánt tulajdonsággal. $k = 6$-ig haladva a 7 tanulóhoz 6 tárgyat választunk így ki a feladat állításának megfelelően.

II. megoldás. Vegyünk egy tárgyat. Ha ezt elhagyva a többi közül is található bármely két tanulóhoz olyan, amelyikből a két tanuló osztályzata különböző, akkor a kivett tárgyat hagyjuk el. Ezt ismételjük a maradó tárgyakkal, amíg lehet. Megmutatjuk, hogy legfeljebb 6 tárgyat kell megtartanunk. Az hogy egy tárgy sem hagyható el, azt jelenti, hogy még egy tárgyat figyelmen kívül hagyva van olyan pár a diákok közt, akiknek a bizonyítványa a többi megtartott tárgyban megegyezik.

Jelöljük a tanulókat egy-egy ponttal, a tárgyakhoz pedig válasszunk egy-egy színt. Egy-egy tárgy színével kössük össze azokat a diákpárokat ábrázoló pontpárokat, akiknek a bizonyítványa egyedül ennek a tárgynak az osztályzatában különbözik. Ekkor mindegyik tárgy színével össze van kötve legalább egy pontpár, egy pontpár viszont legfeljebb egy színnel van összekötve.

Megmutatjuk, hogy ha egy pontból elindulunk, és színes vonal mentén haladva ponttól pontig, visszaérünk a kiinduló pontba, és valamilyen színű összekötésen áthaladunk, akkor legalább még egyszer kellett ilyen színű összekötésen haladnunk. Így ha minden színű összekötésből csak egyet tartunk meg, akkor a maradó vonalrendszerben már egyik pontból sem juthatunk vissza ugyanoda a megmaradt vonalak mentén haladva, hacsak nem ugyanazokon a vonalakon megyünk oda és vissza. Megmutatjuk másrészt, hogy ha az utolsó tulajdonság teljesül, akkor kevesebb pontpár van összekötve, mint ahány pont van.

Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer, mert a megtartott összekötő vonalak száma megegyezik a használt színek, vagyis a megtartott tantárgyak számával, és ez az utolsó állítás szerint kevesebb a pontok, vagyis a tanulók számánál, 7-nél, tehát legfeljebb 6. (Ha annál kevesebb, akkor tetszés szerinti tárgyak hozzávételével kiegészíthetjük a számukat 6-ra, ez nem változtat azon, hogy bármely két tanuló bizonyítványa különböző.)

Tegyük fel, hogy az A_1 tanulót ábrázoló pontból az A_2-t, A_3-at, s i. t., A_k-t ábrázoló pontokon keresztül visszajutunk A_1-be színes vonalak mentén haladva, és közben az A_1-et A_2-vel összekötő színű – mondjuk történelmet jelölő – vonalon többször nem kellett áthaladnunk. Ekkor A_1 és A_2 érdemjegye történelemből különbözik. A_2 bizonyítványa A_3-étól csak egy tárgy érdemjegyében különbözik, mert össze vannak kötve színes vonallal, és ez a tárgy nem a történelem, így történelemből A_3 jegye megegyezik A_2-ével; hasonlóan A_4-é (ha $k > 3$) és a többi számba vett tanulóé egészen A_k-ig A_2 történelem érdemjegyével egyezik meg. Ezen kívül még A_k és A_1 érdemjegyének is egyeznie kellene történelemből, ez azonban nem lehetséges, mert A_k érdemjegye A_2-ével egyezik, és az különbözik A_1-étől.

A következőt kell még bizonyítanunk: ha egy pontokból (legalább 1-ből) és bizonyos pontpárokat összekötő vonalakból álló ábrán (megengedjük azt is, hogy egy pontpár se legyen összekötve) semelyik pontból indulva sem lehet ugyanoda visszajutni, hacsak nem ugyanazon az úton megyünk oda és vissza, akkor kevesebb pontpár van összekötve, mint a pontok száma. Ezt az összekötött pontpárok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha egy pontpár sincs összekötve, akkor az állítás nyilvánvalóan helyes. Legyen most egy a feltételeknek megfelelő ábránk, amiben van összekötött pontpár, és tegyük fel, hogy igaz az állítás minden olyan ábrára, amiben kevesebb pontpár van összekötve. Válasszunk ki egy AB összekötött pontpárt. Ha ezt az összekötést elhagyjuk, a maradó ábrán nem lehet eljutni A-ból B-be, hiszen különben az eredeti ábrán visszajuthatnánk A-ból A-ba úgy, hogy a BA összekötésen csak egyszer haladunk át. Így azok a pontok a köztük levő összekötésekkel együtt, amelyekbe A-ból B érintése nélkül, illetőleg amelyekbe B-ből A érintése nélkül el lehet jutni, továbbá azok, amelyekbe sem A-ból, sem B-ből nem lehet eljutni (ha vannak ilyenek), egy-egy a feltételnek megfelelő ábrát alkotnak (az előbbi kettő állhat esetleg egyedül az A, ill. a B pontból), és nincs közös pontjuk. Ezek mindegyikében kevesebb összekötés van, mint az eredeti ábrában, hiszen az AB összekötés egyikben sem szerepel. Így feltevésünk szerint mindegyik részben kevesebb pontpár van összekötve, mint a pontok száma, tehát az egész ábrában – az AB összekötéstől eltekintve – legalább 2-vel kevesebb, mint a pontok száma. Hozzávéve ezekhez az AB összekötést, még mindig kevesebb az összekötések száma, mint a pontoké.

Ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük, s így a feladat állítása is bizonyítást nyert.

Megjegyzés. Mind a két megoldás általánosan azt adta, hogy ha k tanuló közül bármelyik kettő bizonyítványa különböző, akkor kiválasztható legfeljebb $k-1$ tantárgy úgy, hogy csak az ezekből kapott érdemjegyeket nézve is bármelyik két tanuló bizonyítványa különbözik.

Surányi János