

A VII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát a Német Demokratikus Köztársaság Népmvelési Minisztériuma szervezte Berlin–Bogensee-ben 1965. július 4–13. között. A versenyen 8–8 bolgár, csehszlovák, finn, jugoszláv, lengyel, magyar, mongol, német, román és szovjet diák vett részt. A versenydolgozatokat július 5-én és 6-án írták meg, a 3–3 feladatra 4–4 óra munkaidő állt rendelkezésre.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Keressük meg a  $0 \leq x \leq 2\pi$  szakaszba eső valamennyi olyan  $x$  számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

2. Az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

egyenletrendszer együtthatóiról a következőket tudjuk: a)  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  mindegyike pozitív, b) a többi együttható mind negatív, c) minden egyes egyenletben az együtthatók összege pozitív. – Bizonyítsuk be, hogy az adott egyenletrendszer egyetlen megoldása:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

3. Az adott  $ABCD$  tetraéder  $AB$  élének hosszúsága  $a$ ,  $CD$  élének hosszúsága  $b$ . Az  $AB$  és  $CD$  kitérő élek egyenesének távolsága  $d$ , egymással bezárt (egyik) szögük  $\omega$ . A tetraédert egy az  $AB$  és  $CD$  élekkel párhuzamos  $\varepsilon$  sík két részre osztja. Mekkora e két rész térfogatának aránya, ha ismeretes, hogy az  $AB$  egyenes és az  $\varepsilon$  sík távolsága  $k$ -szorososa a  $CD$  egyenes és az  $\varepsilon$  sík közötti távolságnak?

4. Állítsuk elő az összes olyan  $x_1, x_2, x_3, x_4$  valós számnegyest, melynek bármelyik

5. Az adott  $OAB$  háromszög  $AOB$  szöge kisebb  $90^\circ$ -nál. Az  $AOB$  háromszög kerületének vagy belsejének tetszőleges, de  $O$ -tól különböző  $M$  pontjából merőlegeseket bocsátunk  $\overline{OA}$ -ra és  $\overline{OB}$ -re. Ezeknek a merőlegeseknek a talppontját jelöljük rendre  $P$ -vel, illetve  $Q$ -val. Legyen továbbá  $H$  az  $OPQ$  háromszög magasságpontja.

Mi a  $H$  pontok mértani helye, ha  $M$  befutja

a) az  $AB$  oldalt;

b) az  $OAB$  háromszög belsejét?

6. Adott a síkban  $n$  darab pont ( $n \geq 3$ ). A belőlük kiválasztható összes pontpár által meghatározott szakaszok hosszának maximuma legyen  $d$ . Az említett szakaszok közül azokat, amelyeknek hosszúsága éppen  $d$ , az adott pontrendszer átmérőinek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb  $n$  darab ilyen átmérő van.

A verseny eredménye:

I. díjat nyertek: *Blecher Pavel* (40 pont, szovjet), *Lovász László* (40 pont, Budapest, Fazekas M. Gyak. G., volt III. o. t.), *Szubkov Andrej* (39 p., szovjet), *Valander Szergej* (39 p., szovjet), *Pereszekij Anatolij* (38 p., szovjet), *Sirokov Nyikoláj* (38 p., szovjet), *Makai Endre* (38 p., Budapest, Eötvös J. G., volt IV. o. t.) és *Pelikán József* (38 p., Budapest, Fazekas M. Gyak. G. volt III. o. t.).

II. díjat nyertek: *Karszanov Alexandr* (36 p., szovjet), *Bucur Liliana* (34 p., román), *Pósa Lajos* (34 p., Budapest, Fazekas M. Gyak. G., volt III. o. t.), *Preiss David* (32 p., csehszlovák), *Nowinski Krzysztof* (32 p., lengyel), *Badescu Alexandru* (32 p., román), *Voiculescu Dan* (32 p., román), *Sztojanovszkij Vaszilij* (32 p., szovjet), *Weinstein Jacques* (31 p., román), *Berkes István* (31 p., Budapest, Fazekas M. Gyak. G., volt III. o. t.), *Brandt Manfred* (30 p., német) és *Klamt Wolfgang* (30 p., német).

III. díjat nyertek: *Marcisová Tamara* (29 p., csehszlovák), *Enskonatus Peter* (29 p., német), *Fortuna Zenon* (29 p., lengyel), *Misiurewicz Michal* (29 p., lengyel), *Bisca Octavian* (29 p., román), *Liepe Walter* (28 p., német), *Laczkovich Miklós* (28 p., Budapest, Fazekas M. Gyak. G., volt III. o. t.), *Bote Velimir* (27 p., jugoszláv), *Elekes György* (27 p., Budapest, Fazekas M. Gyak. G., volt II. o. t.), *Figiel Tadeusz* (26 p., lengyel), *Popa Eugen* (24 p., román), *Sívák Bohus* (22 p., csehszlovák), *Otto Wilhelm* (22 p., német), *Asic Miroszláv* (22 p., jugoszláv), *Stefanescu-Sabba Ion* (22 p., román), *Vastinszka Ligyija* (21 pont, bulgár) és *Reznicek Miroszláv* (20 p., csehszlovák).

Ezen az olimpián kerültek először kiadásra külön oklevelek egyes feladatok különösen elegáns megoldásáért, érdekes általánosításáért. Ilyet kaptak: *Erkama Timo* (finn), *Nowinski Krzysztof* (lengyel), *Damdinsuren Avganzeren* (mongol), *Badescu Alexandru* (román), valamint *Lovász László* és *Pelikán József*.

Az egyenlő pontszámú versenyzőket a hivatalos eredménylista az országok német nevének betűrendjében sorolta fel.

Az egyes csapatok összpontszáma: Szovjetunió 281, Magyarország 244, Románia 222, Lengyelország 178, NDK 175, Csehszlovákia 159, Jugoszlávia 137, Bulgária 93, Mongólia 63, Finnország 62.

A fenti 6 feladatot rendre 1409–1414 sorszámmal feladatnak tűzzük ki, megoldásuk az októberi 1965/7 szám további feladataival együtt küldhető be (előbb ne!).