Az idézett feladat[1] olyan másodfokú polinom előállítását kívánta, amelyiknek az értéke az 1, 2, 3 helyeken rendre 1, 1/2, 1/3. Gyakran merül fel általában az a probléma, hogy adott x_1, x_2, …, x_n helyeken rendre y_1, y_2, …, y_n értéket felvevő, lehetőleg alacsony fokú polinomot állítsunk elő.

A feladat első megoldása a polinom együtthatóira a feltételekből adódó elsőfokú egyenletrendszer megoldása révén történt. Az általános probléma megoldása ez úton akkor várható tetszés szerinti y_i-értékek mellett, ha n együttható áll rendelkezésünkre. Mivel egy k-ad fokú polinomnak $k+1$ együtthatója van, így az n feltétel kielégítésére $n-1$-ed fokú polinomot kell általában keresnünk. Ez nem jelenti föltétlenül azt, hogy valóban $n-1$-ed fokú polinom fog adódni, hiszen lehet, hogy a legmagasabb fokú tagok együtthatójára 0-t kapunk. A probléma tehát így vethető fel: *tetszés szerint adva meg* n (különböző) *változó értéket, „helyet" és ezekhez tartozó függvényértéket, keressünk olyan legfeljebb* $n-1$*-ed fokú polinomot, amelyik az adott helyeken az adott értékeket veszi fel.* Ezt interpolációnak nevezzük.

Megmutatható, hogy a feltételekből adódó egyenletrendszer mindig megoldható, és csak egy megoldása van. Az interpolációs polinomnak az ezen az úton való meghatározása azonban igen körülményes. A kitűzött feladat második megoldása egy gyorsabb meghatározási módot mutat be, amire még visszatérünk, előbb azonban bemutatunk egy harmadik eljárást. Ennél sorra vesszük tekintetbe az egyes feltételeket és növeljük eggyel-eggyel a polinom fokszámát úgy, hogy a már kielégített követelmények továbbra is teljesüljenek, és teljesüljön még az újabb követelmény is.

Ha csak az első követelményt tekintjük, van olyan c_1 állandó (és csak egy ilyen van), amelyik az x_1 helyen – és akkor minden helyen – az y_1 értéket veszi fel, ez a $c_1=y_1$ állandó. Ezt most egy elsőfokú polinom hozzáadásával úgy kell módosítani, hogy az x_1 helyen ne változzék, az x_2 helyen azonban y_2 legyen az értéke. Az x_1 helyen a $c_2(x-x_1)$ elsőfokú polinomok tűnnek el, és c_2 valóban megválasztható úgy, hogy $c_1+c_2(x-x_1)=y_1+c_2(x-x_1)$ az x_2 helyen az y_2 értéket vegye fel $\left[c_2=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)\right]$. A harmadik követelmény kielégítésére egy x_1 helyen is, x_2 helyen is eltűnő, tehát $c_3(x-x_1)(x-x_2)$ alakú polinomot kell a már megtalálthoz adni, és bármi is y_3, c_3 mindig választható úgy, hogy az összeg polinom az x_3 helyen az y_3 értéket vegye fel.

Általában arra vezet meggondolásunk, hogy a polinom

$$\begin{aligned}c_1+c_2(x-x_1)+c_3(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+\\ +c_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{1}$$

alakban határozható meg, és itt c_1-et, c_2-t, c_3-at s i. t. végül c_n-et sorban haladva egy-egy elsőfokú egyenletből határozhatjuk meg, ha az előzőket már ismerjük.

Keressük pl. azt a legalacsonyabb fokú polinomot, amelyik a

$$\begin{array}{rrrrl}-1, & 0, & 1, & 1{,}5, & 2{,}5 \text{ helyeken sorra a}\\ 2, & -1, & 0, & 2, & 3\end{array}$$

értékeket veszi fel. Természetesen nem vagyunk kötve a megadás sorrendjéhez. Itt például célszerű előre venni azt a két helyet, ahol egyenlő értékeket vesz fel a polinom, mert akkor tudjuk, hogy a konstans (a fenti c_1) megválasztásával mindjárt két követelményt elégítettünk ki, s így az elsőfokú kifejezés együtthatója (c_2) 0 lesz. Vegyük tehát a helyeket -1, 1,5, 0, 1, 2,5 sorrendben, és megfelelően keressük a polinomot[2]

$$\begin{aligned}&c_1+c_2(x+1)+c_3(x+1)(x-3/2)+c_4(x+1)(x-3/2)x+\\ &\quad+c_5(x+1)(x-3/2)x(x-1)\end{aligned}$$

alakban. Előre tudjuk, hogy itt $c_1=2$, és azt is, hogy $c_2=0$. A 0 helyen vizsgálva a kifejezést az utolsó két tag eltűnik és

$$c_1+c_2-3c_3/2=2-3c_3/2=-1, \qquad c_3=2$$

adódik. $x=1$-re

$$2+2\cdot 2\cdot(-0{,}5)+c_4\cdot 2\cdot(-0{,}5)=0, \qquad c_4=0,$$

– tehát az eddig talált másodfokú függvény a negyedik feltételt is kielégíti –, végül $x=2{,}5$-re

$$2+2\cdot 3{,}5+c_5\cdot 3{,}5\cdot 2{,}5\cdot 1{,}5=3, \qquad c_5=16/35,$$

és a keresett polinom

$$\begin{aligned}&2+2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{16}{35}(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)x(x-1)=\\ &\quad=-\frac{16}{35}x^4+\frac{24}{35}x^3+\frac{86}{35}x^2-\frac{59}{35}x-1.\end{aligned}$$

Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy tényleg megfelel a követelményeknek.

[1] K. M. L. 31 (1965) 149. old.

[2] Még ügyesebb lenne a második tényezőt $2x-3$ alakban írni, ez is a $3/2$ helyen eltűnő tényező. Ezzel csak a megfelelő c_i-k helyébe lépne a felük.

Az 1378. feladat második megoldásában szereplő módszer is általánosan alkalmazható. Állítsuk elő a polinomot olyan polinomok összegeként, amelyek mindegyike egy hely kivételével az összes többin eltűnik, a kérdéses helyen pedig a kívánt értéket veszi fel. Keressük pl. az x_1 helyen y_1 értéket felvevő, $x_2, \ldots, x_n$-re eltűnő polinomot. Az utóbbi feltételt az

$$a_1(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

polinomok elégítik ki. Abból a feltételből, hogy a polinom az x_1 helyen az y_1 értéket vegye fel,

$$a_1 = y_1/(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)$$

adódik. Hasonlóan az x_k helyen y_k értéket felvevő, a többi felsorolt helyen eltűnő polinom

(2) $$L_k(x) = y_k\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = y_k l_k(x).$$

Az

(3) $$L_1(x)+L_2(x)+\ldots+L_n(x)$$

polinom szerkesztése szerint megfelel a követelményeknek.

A két eljárást összehasonlítva sok szól az előbbi mellett. Igaz, hogy mindegyik együtthatót egy-egy egyenletből kell kiszámítani, de ezek igen egyszerű elsőfokú egyenletek. Mind a két eljárás szorzatösszegben állítja elő a keresett polinomot, amelyet még beszorzás és összevonás útján hozhatunk polinom alakra, viszont az első esetben csak az utolsó tag $n-1$-ed fokú, míg a másodikban minden tag $n-1$-ed fokú, mégha a polinom alacsonyabb fokú is. Az első eljárásnál az utóbbi esetben az $n-1$-ed fokú tag fel sem lép, együtthatójára 0 adódik, és hasonlóan további együtthatókra is, ha a polinom még alacsonyabb fokú (hasonlóan mint példánkban c_2-re és c_4-re). A második eljárásnak viszont előnye, hogy az egyes részpolinomok egymástól függetlenül, és előzetes számítások nélkül felírhatók az x_k-k és y_k-k segítségével, sőt $l_k(x)$ már y_k-tól sem függ. Így a második alak különösen hasznos akkor, ha ugyanazokon a helyeken különböző függvényértékekhez egyszerre több polinomot kell meghatároznunk. Ekkor előre kiszámítjuk az $l_k(x)$ függvényeket, azután csak egy-egy számmal meg kell szorozni őket és összeadni. Ezen túl is igen hasznos lehet további matematikai felhasználásokban, hogy fel tudjuk írni a polinomot, és nemcsak eljárást adunk az előállítására.

Az első eljárás alapján nem túl nehéz belátni a polinom egyértelműségét is, de könnyen belátható, hogy egy legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom polinomalakját n helyen felvett értéke egyértelműen előállítja, felhasználva, hogy egy polinomnak nem lehet több 0-helye, mint ahányad fokú[3]. Valóban, ha

$$f(x) = u_0x^{n-1}+u_1x^{n-2}+\ldots+u_{n-1} \quad \text{és}$$
$$f^*(x) = v_0x^{n-1}+v_1x^{n-2}+\ldots+v_{n-1}$$

az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken ugyanazokat az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékeket veszi fel, akkor az

$$f(x)-f^*(x) = (u_0-v_0)x^{n-1}+(u_1-v_1)x^{n-2}+\ldots+(u_{n-1}-v_{n-1})$$

legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom eltűnik az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken, tehát több helyen, mint ahányad fokú. Ez csak úgy lehet, ha minden együttható 0, vagyis $u_i = v_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Az interpolációs polinom (1) alakját *Newton*-félének, a (2), (3) által szolgáltatott alakot *Lagrange*-félének nevezik.

Az interpolációs polinomoknak fontos elméleti szerepük van függvények polinomokkal való megközelítésében. Ezek vizsgálata sokat köszönhet sok magyar matematikus, így *Fejér Lipót* és tanítványai, többek közt *Erdős Pál, Grünwald Géza, Turán Pál, Freud Géza* és mások munkásságának.

Surányi János

[3]Lásd pl. *Hódi B.–Szász G.–Tolnai J.:* Matematika a gimn. IV. o. számára, 11. kiad., Tankönyvkiadó, Bp., 1962. 222. o.