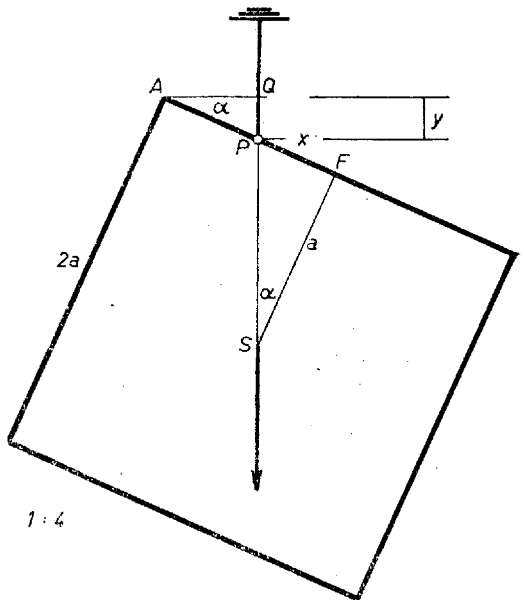
Legyen a lemez éle röviden $2a$, a kérdéses P felfüggesztési pontnak a vele egy élen levő F oldalfelező ponttól való távolsága x, így az A legközelebbi csúcstól mért távolsága $a-x$.



Homogén lemez S súlypontja a négyzet középpontjában van, így PS függőleges helyzetű lesz, és A-nak ezen levő vetületét Q-val jelölve az $FP=x$-től függő $PQ=y$ magasságkülönbség maximumát keressük.

A PAQ és PSF derékszögű háromszögek hasonlóak, mert P-beli szögeik egymásnak csúcsszögei, így $PSF\sphericalangle = PAQ\sphericalangle$. Jelöljük ezt a szöget α-val, ekkor a PSF háromszögben $x=a\ \mathrm{tg}\ \alpha$ és a PAQ háromszögben

$$y=PQ=AP\sin\alpha=(a-x)\sin\alpha=a\ (1-\mathrm{tg}\ \alpha)\ \sin\alpha.$$

Mivel $0\leqq x\leqq a$ azért $0\leqq\alpha\leqq 45^\circ$. Az y értéke a végpontokban 0 és az értelmezési tartomány belsejében y pozitív, így y az értelmezési tartomány belsejében veheti fel a maximumát. Ha van olyan α érték, melyre y maximális, akkor emellett y-nak α szerinti deriváltja 0-val egyenlő:

$$\frac{dy}{d\alpha}=-\frac{a}{\cos^2\alpha}\sin\alpha+a\ (1-\mathrm{tg}\ \alpha)\cos\alpha=0. \tag{1}$$

Mivel $a>0$, $\cos\alpha>0$, oszthatunk velük, továbbá (-1)-gyel is osztva:

$$\frac{\sin\ \alpha}{\cos^3\ \alpha}+\mathrm{tg}\ \alpha-1=0.$$

Itt $\sin\alpha$ helyére $\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$-t írva az $x/a=\mathrm{tg}\ \alpha$ ismeretlenre harmadfokú egyenletet kapunk:

$$\mathrm{tg}^3\ \alpha+2\ \mathrm{tg}\ \alpha-1=0. \tag{2}$$

Ennek egy gyöke a Cardano-féle képlet szerinti[1]

$$\frac{x}{a}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{177}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{177}}{18}}.$$

Az előírt 0,1 mm-es hibakorlát az $a=1$ dm-es adatnak $1/10^3$ része, ezen belül maradunk, ha egyik köbgyökben sem haladjuk meg az $5/10^4$ hibát.

Táblázatunk szerint $\sqrt{177}$ értéke 13,30 és 13,31 között van, 18-adrésze 0,7390 és 0,7395 között, így a két köbgyök alatt 1,2390 és 1,2395 közötti, ill. $-0{,}2395$ és $-0{,}2390$ közötti szám áll.

A köbgyökvonásokat logaritmussal végezve az első köbgyök értéke 1,0740 és 1,0742 között van, a másodiké $-0{,}6207$ és $-0{,}6206$ között, így x/a értéke 0,4533 és 0,4536 között, ezért akár 0,453-et, akár 0,454-et veszünk, az elkövetett hiba kisebb, mint 10^{-3}.

Több valós gyöke nincs (2)-nek, mert bal oldalának deriváltja,

$$3\Big(\frac{x}{a}\Big)^2+2$$

[1]Lásd pl. *Hack Frigyes–Kugler Sándorné:* Függvénytáblázatok, matematikai és fizikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, 65–66. o.

mindenütt pozitív, a bal oldal szigorúan monoton nő. Így a keresett szélső érték csak $x/a=0{,}453$-nél lehet. Itt valóban maximum van, hiszen $\frac{dy}{d\alpha}$ előjele a (2) bal oldalán álló kifejezés előjelének (-1)-szerese, és mivel (2) bal oldalának a deriváltja pozitív, (2) bal oldala monoton nő α-ban, tehát a kapott gyökhely előtt negatív és utána pozitív. Ennek megfelelően y mint az α függvénye a kapott gyökhely előtt monoton nő, utána pedig monoton fogy.

$a=10$ cm figyelembevételével a keresett távolság $PA=10-4{,}53=5{,}47$ cm. (A magasságkülönbség maximuma ekkor 22,6 mm.)

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn.)