A) Az általános verseny feladatai

1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{1}$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalából levonva a jobb oldalt, a keletkező k különbség nem lehet negatív. Ha a helyébe b-t, b helyébe c-t, c helyébe a-t, vagy a helyébe c-t, c helyébe b-t, b helyébe a-t írunk, a különbségben csak a tagok sorrendje változik meg, ezért feltehetjük, hogy a a számhármasban előforduló legkisebb érték, azaz

$$x = b - a \geq 0 \quad \text{és} \quad y = c - a \geq 0.$$

Fejezzük ki k-t a, x és y segítségével:

$$\begin{aligned} k &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2 b - b^2 c - c^2 a = a^3 + (a+x)^3 + \\ &+ (a+y)^3 - a^2(a+x) - (a+x)^2(a+y) - (a+y)^2 a = \\ &= 2a(x^2 - xy + y^2) + (x^3 - x^2 y + y^3). \end{aligned}$$

Itt egyik zárójeles kifejezés sem negatív, amint az a következő átalakításokból nyilvánvaló:

ha $x \geq y$, akkor

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= x(x-y) + y^2 \geq 0, \quad \text{és} \\ x^3 - x^2 y + y^3 &= x^2(x-y) + y^3 \geq 0; \end{aligned}$$

ha pedig $x < y$, akkor

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= x^2 + y(y-x) > 0, \quad \text{és} \\ x^3 - x^2 y + y^3 &= x^3 + y(y^2 - x^2) > 0. \end{aligned}$$

Egyik esetben sem lehet tehát k negatív.

A fenti átalakításokból látható, hogy 0 is egyedül akkor lesz k, tehát az eredeti egyenlőtlenség két oldala csak akkor egyenlő, ha mind a két zárójeles kifejezés 0. Ez akkor áll fenn, ha $x = y$ és közös értékük 0, azaz ha $a = b = c$.

II. megoldás. Az előző megoldás bevezető meggondolása szerint feltehetjük, hogy a c szám sem a-nál, sem b-nél nem kisebb. A bal és jobb oldal k különbségét így alakítjuk át:

$$\begin{aligned} k &= a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) = \\ &= a^2(a-b) - b^2\big[(c-a) + (a-b)\big] + c^2(c-a) = \\ &= (a^2 - b^2)(a-b) + (c^2 - b^2)(c-a) \\ &= (a+b)(a-b)^2 + (c+b)(c-b)(c-a). \end{aligned}$$

Itt egyik tag sem negatív, mert sem az elsőben a különbség négyzete, sem a másodikban a különbségek nem negatívok, tehát $k \geq 0$.

$k = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét tag 0, tehát ha egyrészt $a - b = 0$, vagyis $a = b$, amivel a második tag 2. és 3. tényezője egyenlővé válik, másrészt e két tényező közös értéke is 0, tehát akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása könnyen következik *Szűcs Adolf* következő tételéből[1]: legyen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$, legyen továbbá $z_1, z_2, \ldots, z_n$ az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok elrendezése tetszés szerinti sorrendben, akkor

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n &\geq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n \geq \\ &\geq x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1. \end{aligned}$$

Ebből feladatunk állítása így következik: Legyen $n = 3$, továbbá tegyük fel továbbra is, hogy $a \leq b$, $a \leq c$. Ha $b \leq c$, legyen $x_1 = c^2$, $x_2 = b^2$, $x_3 = a^2$, $y_1 = c$, $y_2 = b$, $y_3 = a$, $z_1 = a$, $z_2 = c$, $z_3 = b$. Ha pedig $b > c$, akkor legyen $x_1 = b^2$, $x_2 = c^2$, $x_3 = a^2$, $y_1 = b$, $y_2 = c$, $y_3 = a$, $z_1 = c$, $z_2 = a$, $z_3 = b$. A fenti első egyenlőtlenség mindkét esetben a feladat állítását adja.

2. Az egyenlőtlenség helyessége belátható a számok nagyságviszonyára tett minden megszorítás nélkül is, pl. a következő azonosság alapján:

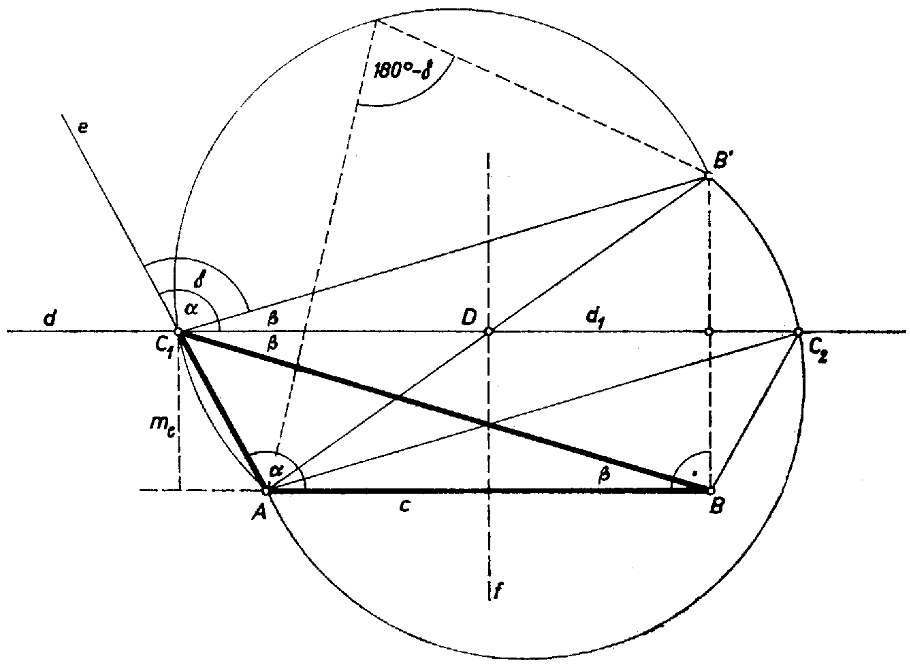
$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - a^2 b - b^2 c - c^2 a = \\ &= \frac{1}{3}\big[(a-b)^2(2a+b) + (b-c)^2(2b+c) + (c-a)^2(2c+a)\big]. \end{aligned}$$

[1] V. ö.: *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek II. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 44. o.

2. feladat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magasság és a rajta levő két szög különbsége.*

Megoldás. Ha az adott szögkülönbség 0, akkor egyenlő szárú háromszöget kell szerkeszteni az alapjából és az ehhez tartozó magasságból. Ennek megoldása jól ismert, így tovább azzal az esettel foglalkozunk, amikor az adott δ szögkülönbség pozitív.

Legyen ABC a keresett háromszög, a jelölést úgy választva, hogy $AB = c$ legyen az adott hosszúságú oldal, C-nek AB-től való távolsága az adott m_c magasság, az A és B csúcsoknál levő α és β szög különbsége pedig δ. Húzzuk meg C-n át az AB-vel párhuzamos d egyenest. Ennek C-ből induló és AB-vel egyező irányú d_1 félegyenese CB-vel β nagyságú szöget zár be, az AC oldal C-n túli meghosszabbításával, e-vel bezárt szöge pedig a. Így CB-t d-re tükrözve létrejön az adott szögkülönbség. Jelöljük B tükörképét d-re B'-vel, ekkor CB' is β nagyságú szöget zár be d_1-gyel, s így CB' és e szöge δ, tehát $ACB'\sphericalangle = 180° - \delta$.



1. ábra

A d egyenes és B-nek erre vonatkozó tükörképe C ismerete nélkül is megszerkeszthető. Így a következő szerkesztéshez jutottunk: Rajzoljunk c hosszúságú AB szakaszt és az AB egyenes egyik oldalán, tőle m_c távolságban egy vele párhuzamos d egyenest. Szerkesszük meg a B pont d-re vonatkozó tükörképét, B'-t. Szerkesszük meg végül azt a körívpárt, amiről az AB' szakasz $180° - \delta$ szögben látszik. A d egyenes és a körívpár C_1 és C_2 metszéspontja lehet a háromszög harmadik csúcsa. Ezek meg is felelnek, mert bármelyiket jelölve C-vel, az ABC háromszögben $AB = c$, az erre merőleges magasság m_c, továbbá d-nek a C-ből induló, AB-vel egyirányú félegyenese AC meghosszabbításával α nagyságú szöget zár be. CB'-vel pedig ugyanakkorát, mint a tükörképével, CB-vel, az utóbbi szög szárai pedig ellenkező irányban párhuzamosak β száraival. Így α és β különbsége egyenlő az AC meghosszabbítása és CB' közti szöggel, ami viszont az $ACB'\sphericalangle$ kiegészítő szöge, tehát δ.

A keletkezett két háromszög egymás tükörképe az AB oldal f felező merőlegesére, ugyanis a körívpár centrál–szimmetrikus az AB' szakasz D felezőpontjára. Ezen megy át a d egyenes is, mert átmegy BB' felezőpontján és párhuzamos AB-vel. Ugyancsak átmegy D-n f is, mint az ABB' derékszögű háromszög középvonala. Így C_1 és C_2 az f-re D-ben merőleges d egyenesen D-től egyenlő távolságra van, tehát a két pont egymás tükörképe f-re vonatkozóan.

Mivel A és B' a d egyenes különböző partján van, így az egyenes a körívpár mindkét ívét metszi és mindegyiket csak egy pontban, a feladatnak tehát mindig van megoldása és csak egy (ha, mint szokás, egybevágó megoldásokat nem tekintünk lényegesen különbözőknek).

3. feladat. *Határozzuk meg az $\overline{ABCD}$ négyjegyű számot úgy, hogy a következő osztás helyes legyen: $\overline{ABCD} : D = \overline{DBA}$. (A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)*

Megoldás. Írjuk a feltételt szorzat alakban:

$$\overline{DBA} \cdot D = \overline{ABCD}. \tag{2}$$

Tekintsük először az A és D számjegyeket; első jegy gyanánt csak ezek lépnek fel, így egyikük sem 0.

A szorzat utolsó jegye, ami nem más, mint a $D \cdot A$ rész–szorzat utolsó jegye, egyenlő D-vel, így különbségük, $DA - D = D(A-1)$, osztható 10-zel. Ezért D és $A-1$ közül legalább az egyik osztható 5-tel, mert 5 törzsszám. Ha D osztható 5-tel, akkor csak $D = 5$ lehet, ha pedig $A-1$ osztható 5-tel, akkor értéke 5 vagy 0; így az alábbi lehetőségek jönnek szóba:

$$a)\quad D = 5, \qquad b)\quad A = 6, \qquad c)\quad A = 1.$$

Másrészt a szorzandóra:

$$100\,D < \overline{DBA} < 100(D+1),$$

és így a szorzatra:

$$(3) \qquad 100\,D^2 < \overline{DBA} \cdot D = \overline{ABCD} < 100\,D(D+1).$$

Hasonlóan a szorzatra a kezdő jegye alapján:

$$(4) \qquad 1000\,A < \overline{ABCD} < 1000(A+1).$$

A közös belső tag miatt (4) bal oldala kisebb (3) jobb oldalánál, és (3) bal oldala kisebb (4) jobb oldalánál:

$$1000\,A < 100\,D(D+1), \quad \text{azaz} \quad (5) \quad 10\,A < D^2 + D,$$
$$100\,D^2 < 1000(A+1), \quad \text{azaz} \quad (6) \quad D^2 < 10(A+1).$$

Ezek alapján az *a)* lehetőség esetében $A < 3$, ill. $A > 1{,}5$, tehát $A = 2$, így viszont $D(A-1) = 5$, nem osztható 10-zel, ez a feltevés nem vezet megoldásra.

A *b)* esetben (6) alapján $D^2 < 70$, $D \leq 8$, ezt felhasználva (5)-ből

$$D^2 > 10\,A - D = 60 - D \geq 52, \qquad D > 7,$$

tehát csak $D = 8$ jön szóba. Ekkor azonban a követelményből

$$(800 + 10B + 6) \cdot 8 = 6000 + 100B + 10C + 8,$$
$$2B + C = B + B + C = 44,$$

ami lehetetlen, mert három számjegy összege legfeljebb 27. Innen sem kapunk megoldást.

A hátra levő $A = 1$ esetben (6)-ból $D^2 < 20$, $D \leq 4$, így (5)-ből

$$D^2 > 10A - D \geq 10 - 4 = 6, \qquad D \geq 3,$$

D szóba jövő értékei 3 és 4. Ekkor (2)-ből

$$100D^2 + 10BD + D = 1000 + 100B + 10C + D,$$
$$C + (10 - D)B = 10(D^2 - 10),$$

a bal oldal sohasem negatív, a jobb oldal viszont csak $D > 3$ esetén nem az.
A fennmaradt $D = 4$ lehetőség esetében

$$C + 6B = 60,$$

itt $C < 10$ miatt $6B > 50$, $B > 8$, és a $B = 9$, $C = 6$ jegyekkel megoldást kapunk:

$$491 \cdot 4 = 1964,$$

tehát a keresett szám 1964.

A megoldásban nem kellett kihasználnunk, hogy különböző betűk helyére különböző számjegyek írandók, csak azt, hogy kezdő számjegy nem lehet 0.

B) A speciális matematikai osztályok versenyének feladatai
Az **1. feladat** ugyanaz volt, mint az általános versenyen.

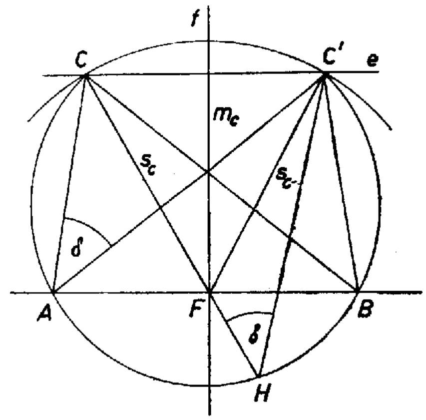
2. feladat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott valamelyik oldalához tartozó súlyvonala és magasságvonala, továbbá az ugyanezen oldalon fekvő szögek különbsége.*

Megoldás. Legyen a keresett háromszög ABC, benne a C csúcsnak az AB oldaltól, illetőleg annak F felezőpontjától mért távolsága az adott m_c magasság, illetőleg s_c súlyvonal, továbbá a CAB és CBA szögek különbsége egyenlő az adott δ szöggel.

Először a $\delta > 0$ esettel foglalkozunk. Tükrözzük az ABC háromszöget az AB oldal f felező merőlegesére, C tükörképét jelöljük C'-vel. Ekkor CC' párhuzamos AB-vel, tőle m_c távolságra van, $C'F = CF = s_c$, a CC' szakasz látószöge pedig A és B csúcsból a tükrözés folytán a háromszög AB oldalán fekvő szögeinek a különbsége:

$$CAC'\sphericalangle = CBC'\sphericalangle = \delta.$$

Ezek szerint meg tudjuk szerkeszteni először is a CFC' egyenlő szárú háromszöget m_c magasságából és s_c szárából: egy e egyenesre egy pontjában f merőlegest állítunk, erre e-től egyik irányban rámérjük m_c-t, végpontja F. Az F körüli s_c sugarú körrel kimetsszük e-ből a C és C' pontot. Ezután az A és B pontot az F-en át e-vel párhuzamosan húzott egyenesből az az i körív metszi ki, amelyről CC' δ szögben látszik, és amelyik e-nek azon a partján van, amelyiken F.



2. ábra

Az ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert AB-re merőleges magassága m_c, miután $AB \parallel CC'$, CF súlyvonala s_c hosszúságú, végül A és B egymás tükörképe f-re, mert az i ív középpontja rajta van a CC' húr felező merőlegesén, f-en, így az A és B csúcsnál levő szögeinek különbsége egyenlő a CAB és $C'AB$ szögek különbségével, ez pedig szerkesztés szerint δ.

A másik keletkező háromszög, ABC', az előbbi tükörképe f-re, így nem tekintjük attól különböző megoldásnak.

Nyilvánvaló, hogy a $CC'F$ háromszög akkor és csak akkor jön létre, ha $s_c > m_c$. A és B akkor és csak akkor jön létre, ha F benne van abban a körben, melynek része i, vagyis ha CF-nek F-en túli meghosszabbítása metszi ezt a kört. A metszéspontot H-val jelölve ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$CFC'\sphericalangle > CHC'\sphericalangle = \delta.$$

Ha $\delta = 0$, akkor a háromszög egyenlő szárú, és $m_c = s_c$. Így ha e két feltétel egyike teljesül, akkor csak abban az esetben van a követelményeknek megfelelő háromszög, ha a másik is teljesül. Ha ez nem áll, az adatok ellentmondók; ha viszont teljesül, akkor minden m_c magasságú, egyenlő szárú háromszög megfelel, így a feladat határozatlan.

Összefoglalva: a feladat megoldható, ha $s_c > m_c$, továbbá az m_c magassággal és s_c szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszögnek a szárak közti szöge nagyobb δ-nál. E feltételek teljesülése esetén a feladatnak egy megoldása van.

3. feladat. *Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek első jegyét elhagyva a kapott szám egy prímszám négyszerese, a kapott számra következő szám pedig egy prímszám ötszöröse?*

Megoldás. A kérdéses szám első jegye nyilván 1, hiszen minden más esetben az első jegy helyére 1-et írva egy ugyanolyan tulajdonságú, de kisebb számot kapnánk.

Legyen az első jegy elhagyásával keletkező szám N. A feltétel szerint $N = 4p$ és $N+1 = 5q$, ahol p és q prímszámok. Ebből

$$q = 5q - 4q = 4p + 1 - 4q = 4(p - q) + 1 = 4k + 1,$$

és

$$4p = 5q - 1 = 20k + 4, \qquad \text{azaz} \qquad p = 5k + 1,$$

ahol k egész szám. k növekedésével p, és így N is növekszik, ezért feladatunk a legkisebb olyan k egész szám meghatározása, melyre $p = 5k + 1$ is, $q = 4k + 1$ is prímszám.

Mivel N nem negatív, így p és q sem, és mivel prímek, így 1-nél nagyobbak, tehát $k \geq 1$. k páros, mert különben $5\ k + 1$ páros összetett szám lenne. k-nak oszthatónak kell lennie 3-mal is, mert ha 1 maradékot adna, akkor $5k + 1$ lenne 3-mal osztható és 3-nál nagyobb, tehát összetett, ha pedig 2 maradékot adna, akkor $4k + 1$. Így 2-vel és 3-mal, tehát 6-tal is osztható szám: $k = 6n$, $p = 30n + 1$, és $q = 24n + 1$, és feladatunk megkeresni azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre p is, q is prím.

Kipróbálva n első néhány értékét, az alábbi táblázatban kiírtuk egy–egy összetettnek adódó érték prímtényezős felbontását:

$n=1$	esetén		$24\,n+1=5^2$
$n=2$	esetén		$24\,n+1=7^2$
$n=3$	esetén	$30\,n+1=7\cdot 13$,	
$n=4$	esetén	$30\,n+1=11^2$,	
$n=5$	esetén		$24\,n+1=11^2$,
$n=6$	esetén		$24\,n+1=5\cdot 29$,
$n=7$	esetén		$24\,n+1=13^2$,
$n=8$	esetén	$30\,n+1=241$,	$24\,n+1=193$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy 241 és 193 mindegyike prím. Így $N=4\cdot 241=964$, és a keresett szám 1964.