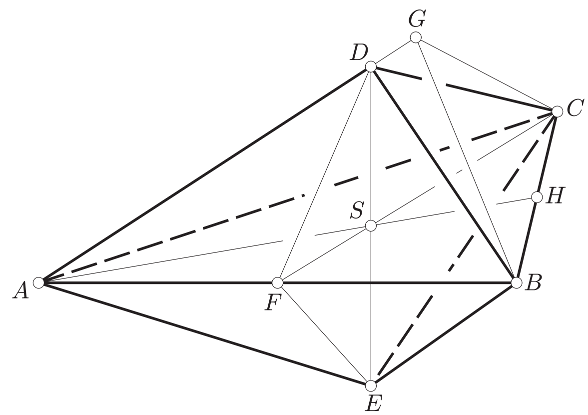
Első feladat. *Két egybevágó háromoldalú szabályos gúlát alapjuk mentén összeillesztünk. A keletkező hatlapú test minden lapszöge ugyanakkora. Határozzuk meg a két háromélű csúcs távolságának és két négyélű csúcs távolságának az arányát.*

I. megoldás. Ha a szabályos $ABC\triangle$ mentén összeillesztjük az egybevágó $ABCD$, $ABCE$ gúlákat (1. ábra), a D, E csúcsok a háromszög síkjára a háromszög S középpontjában emelt merőlegesen helyezkednek el. Az összeillesztéssel keletkező test eszerint nemcsak az ABC síkra, hanem pl. az ADE síkra is szimmetrikus. E szimmetriákból következik, hogy a D, E csúcsokból az AB élre, valamint a B, C csúcsokból az AD egyenesre bocsátott merőlegesek egyenlők, s hogy közös F és G talppontjuk van. Eszerint a $DFE\sphericalangle$ az AB él mentén, a $BGC\sphericalangle$ pedig az AD él mentén csatlakozó lapok szögét méri. Minthogy e szögek a feltevés szerint egyenlők, a DFE, BGC háromszögek hasonlók, hiszen egyenlő szárúak és szárszögük ugyanakkora.



1. ábra

A hasonlóságból a megfelelő oldalak arányára

$$DE : BC = DF : BG$$

következik. A jobb oldali szakaszok az $ABD\triangle$ magasságai, s ezért fordítva aránylanak, mint a megfelelő oldalak:

$$DF : BG = AD : AB.$$

Minthogy $BC = AB$, az aránypárok egybevetéséből $DE = AD$ következik, tehát az is, hogy az $ADE\triangle$ szabályos, és így hasonló az $ABC\triangle$-höz. Ebből a hasonlóságból az oldalak és magasságok arányára

$$DE : BC = AS : AH$$

adódik. Minthogy az S súlypont harmadolja az AH súlyvonalat, az utolsó arány értéke $2/3$. Ez tehát egyben a $DE : BC$ arány keresett értéke is.

Megjegyzés. Feladatunk abból a feltételezésből indul ki, hogy van olyan test, amelyre a feladat követelménye teljesül, azaz lapszögei mind egyenlők. Rámutatunk itt arra, hogy ez valóban igaz, mégpedig éppen úgy jutunk hozzá, hogy a $DE : BC$ arány értékét a megoldásban talált $2/3$-nak választjuk, azaz a szabályos $ABC\triangle$ középpontjában a háromszög síkjára emelt merőlegesen mindkét irányban a háromszög oldalának harmadát mérjük fel, s az így kapott D, E csúcsok által meghatározott testet tekintjük. Ennek az állításnak a helyessége megoldásunk gondolatmenetének megfordítása útján látható be.

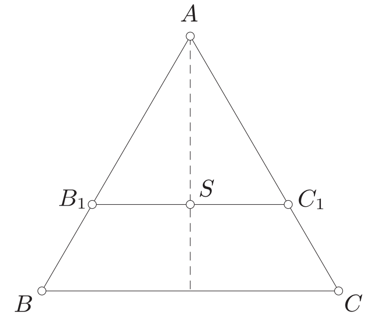
A szerkesztés következménye ugyanis, hogy a megoldásbeli utolsó aránypár teljesül, s ebből következik, hogy az $ADE\triangle$ és $ABC\triangle$ hasonló, hogy tehát az $ADE\triangle$ is szabályos. Eszerint $AD = DE$, és a középső aránypár jobb oldalán álló arány értéke $2/3$. Ennyi tehát a bal oldali arány értéke is, s ezért az első aránypár is helyes. Ebből viszont az egyenlő szárú $DFE\triangle$ és $BGC\triangle$ hasonlósága adódik, s ezek megfelelő szögeinek egyenlősége miatt a szerkesztett test lapszögei valóban egyenlők.

A szóban forgó testhez a legegyszerűbben talán úgy juthatunk el, hogy egy szabályos $ADE\triangle$-et DE oldala körül mindkét irányban 120°-kal elforgatunk, s az így adódó három háromszög által kifeszített testet tekintjük. Ez közvetlenül adódik a fentiekből.

II. megoldás. Az 1. ábra jelöléseit használjuk, és abból indulunk ki, hogy az összeillesztéssel keletkező test az ABC síkra és az ADE síkra is szimmetrikus. Eszerint ez a két sík az AB élű és az AD élű lapszöget felezi, s e lapszögek feltételezett egyenlősége miatt a két sík mindegyike ugyanakkora lapszöget alkot az ABD síkkal.

Tükrözzünk a $BAD\sphericalangle$ szögfelezőjében a szög síkjára merőlegesen emelt síkra. E tükrözéskor az AB és AD szárak is, s az imént említett lapszögek egyenlősége miatt az ABC és ADE síkok is helyet cserélnek. Ezért AS metszésvonaluk helyben marad, és a szimmetrikus $BAS\sphericalangle$ és $DAS\sphericalangle$ egyenlő. Ha tehát a DE szakaszt az AS tengely körül 90°-kal elforgatjuk, D és ugyanúgy E az AB és AC élre jut, s ezért DE egyenlő az $ABC\triangle$-et átvágó, AS-re merőleges B_1SC_1 szakasszal (2. ábra). Minthogy pedig S az $ABC\triangle$ súlypontja, s ez A-tól 2/3-szor akkora távolságra van, mint a BC oldal felezőpontja, a keresett arány

$$DE : BC = B_1C_1 : BC = \frac{2}{3}.$$



2. ábra

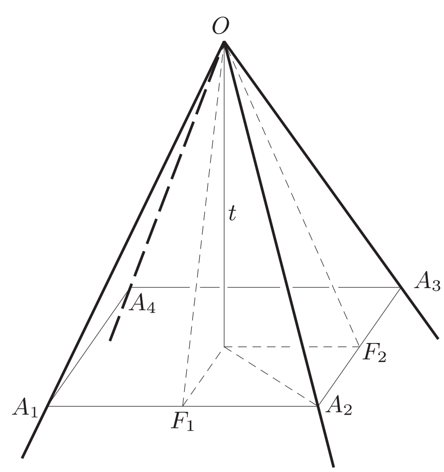
III. megoldás. Tekintsük az összeillesztéssel keletkező bipiramis A csúcsú, négyélű szögletét. Ezt a szögletet négy egyenlő szögtartomány határolja, amelyek a feltevés szerint egyenlő lapszögeket alkotva csatlakoznak egymáshoz. Eszerint ez négyoldalú szabályos szöglet, azaz olyan, mint a négyoldalú szabályos gúla csúcsánál elhelyezkedő, amely a gúla tengelye körül $90°$-kal elforgatva önmagát fedi.

Ha tehát a bipiramis DSE tengelyét az A csúcsú szöglet AS tengelye körül $90°$-kal elforgatjuk, akkor az előző megoldásban említett B_1C_1 szakaszhoz jutunk. Ebből a feladat kérdésére adandó válasz már ugyanúgy következik.

Megjegyzés. Utolsó megoldásunk nemcsak azért rövid, mert az előzőre hivatkozott, hanem azért is, mert a szögletekre vonatkozó ismeretekre támaszkodott. Mielőtt ezeket részleteznők, néhány elnevezést említünk meg.

Tekintsünk egy poliédert, annak egyik csúcsát és mindazokat az ebből a csúcsból kiinduló félegyeneseket, amelyeknek egy kezdőszakasza a poliéderhez tartozik. E félegyenesek pontjai együttesen egy végtelenbe nyúló alakzatot alkotnak, amelyet a poliéder *szögletének* nevezünk. A szöglet legtöbbször végtelenbe nyúló gúla. A szögletet határoló szögtartományok a szöglet *oldalai,* s a csatlakozó oldalak által alkotott lapszögek a szöglet *szögei.*

Egy szöglet akkor *szabályos,* ha minden oldala és minden szöge ugyanakkora. Bebizonyítjuk, hogy a szabályos n-oldalú szögletnek van *tengelye*, amely körül $360°/n$ szöggel elforgatva a szöglet újból ugyanabba a helyzetbe jut. Megoldásunk ezt használta fel az $n=4$ esetben.



3. ábra

Tekintsük az $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ élű, n-oldalú szabályos szögletet, (3. ábra). Az $A_1OA_2\sphericalangle$ síkjára az OF_1 szögfelező mentén merőleges síkot emelünk. Ezt a síkot az OA_2 élű lapszöget felező sík a t egyenesben metszi. A szabályosság miatt $A_1OA_2\sphericalangle = A_2OA_3\sphericalangle$, s ezért e szögek a lapszögüket felező A_2Ot síkra vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből a szimmetriából következik, hogy az F_1Ot sík tükörképe az $A_2OA_3\sphericalangle$ síkját annak OF_2 szögfelezőjében metszi, s hogy OF_1 és OF_2 ugyanakkora szöget zár be a t egyenessel. Ha tehát a szögletet t körül az F_1Ot, F_2Ot síkok hajlásszögével elforgatjuk, akkor az A_1OA_2 oldal fedi az A_2OA_3 oldalt. Minthogy pedig a szabályos szöglet szögei egyenlők, az elforgatott A_2OA_3 oldal az A_3OA_4 síkba kerül, és a szöglet oldalainak egyenlősége miatt az OA_3 él az OA_4 helyzetbe jut. Ugyanígy következtethetünk azonban tovább, és megállapíthatjuk, hogy valamennyi oldal és él a rákövetkezőnek a helyét foglalja el. Ha tehát ezt az elforgatást n-szer megismételjük, mindegyik az n-edik rákövetkezőt, azaz önmagát fedi. Eszerint ez az n-szeres elforgatás $360°$-os, és egy elforgatás valóban ennek n-edrésze.

Ha n páros, legyen $n = 2k$. Ekkor a k-szoros elforgatás $180°$-os, tehát a tengelyre vonatkozó tükrözést jelent. Ebben az esetben kimondhatjuk tehát, hogy a tengely az átellenes élek szögét felezi. Megoldásunk az $n = 4$ esetben ezt is felhasználta.

Második feladat. *Egy táncmulatságon minden fiú táncolt legalább egy lánnyal, de egy sem táncolt mindegyikkel, és ugyanígy minden lány táncolt legalább egy fiúval, de nem mindegyikkel. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a táncmulatság résztvevői közül két fiú és két lány úgy, hogy e két fiú mindegyike a két lány közül csak az egyikkel táncolt, és ugyanígy a két lány mindegyike is csak az egyikkel táncolt a két fiú közül.*

I. megoldás. A fiúkat osztályozhatjuk aszerint, hogy ki hány lánnyal táncolt. Tartozzék F_1 azok közé a fiúk közé, akik a legtöbb lánnyal táncoltak. Minthogy F_1 sem táncolt minden lánnyal, van olyan L_1 lány, akivel F_1 nem táncolt. Van viszont olyan F_2 fiú, aki táncolt L_1-gyel, hiszen L_1 is táncolt legalább egy fiúval.

F_1 megválasztása miatt F_2 nem táncolhatott több lánnyal, mint ahánnyal F_1 táncolt. Ebből következik, hogy F_2 nem táncolhatott mindazokkal a lányokkal, akikkel F_1 táncolt, mert az ellenkező esetben F_2 több lánnyal táncolt volna, mint F_1, hiszen F_2 táncolt L_1-gyel is, F_1 pedig nem. Van tehát olyan L_2 lány, akivel F_1 táncolt, de F_2 nem.

Az F_1, F_2 fiúk és L_1, L_2 lányok kielégítik a feladat követelményét, hiszen F_1 és L_1, valamint F_2 és L_2 nem táncoltak egymással, viszont F_1 táncolt L_2-vel és F_2 táncolt L_1-gyel.

Megjegyzés. A feladat feltevései közül csak azt használtuk fel, hogy egyik fiú sem táncolt minden lánnyal, s hogy minden lány táncolt legalább egy fiúval. Ugyanígy persze elég lett volna csak arra támaszkodnunk, hogy egyik lány sem táncolt minden fiúval, s hogy minden fiú táncolt legalább egy lánnyal, hiszen a fiúk és a lányok szerepét a megoldásban is felcserélhetjük. Két lehetőséget találtunk tehát a feladat szövegének módosítására, feltevéseinek gyengítésére.

Bár közvetlenebb és egyszerűbb megoldást nem tudunk adni, mégis ismertetünk további megoldásokat, mert ezek révén további érdekes kapcsolatokra és általánosításokra mutathatunk rá. Az előző bekezdés észrevétele a további megoldásokra is vonatkozik.

II. megoldás. Válasszunk ki a résztvevők közül egy F_1 fiút és egy L_1 lányt, akivel F_1 nem táncolt. Legyen továbbá F_2 olyan fiú, aki táncolt L_1-gyel, és L_2 olyan lány, akivel F_2 nem táncolt. Ezt a kiválasztást ugyanígy folytatjuk: F_i kiválasztása után $(i = 2, 3, \ldots)$ olyan L_i lányt választunk, akivel F_i nem táncolt, majd olyan F_{i+1} fiút, aki táncolt L_i-vel. Addig folytatjuk ezt, amíg nem kerülne sor olyannak a kiválasztására, akit korábban már kiválasztottunk. Minthogy a táncmulatságon véges sokan vesznek részt, ez előbb-utóbb bekövetkezik. Eszerint ki lehet választani k fiút és k lányt, és ezeket körbe lehet úgy állítani, hogy minden fiút két lány fogjon közre, és minden fiú táncolt a balján álló lánnyal, de nem táncolt a jobbján állóval. Azt kell bebizonyítanunk, hogy ez már két fiúval és két lánnyal is megvalósítható.

Legyenek egy ilyen körben állók sorjában

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2,\ \ldots,\ F_k,\ L_k,$$

ahol tehát azt is tudjuk, hogy F_1 és L_k táncoltak egymással. Megmutatjuk, hogy ha $k > 2$, akkor kevesebb fiúból és lányból is tudunk ilyen kört alkotni. Ha ugyanis F_1 táncolt L_2-vel, akkor

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2,$$

ha pedig F_1 nem táncolt L_2-vel, akkor

$$F_1,\ L_2,\ \ldots,\ F_k,\ L_k$$

elégíti ki a követelményt. Eszerint a létszám mindig tovább csökkenthető, amíg csak két fiúhoz és két lányhoz el nem jutunk.

Megjegyzés. Ha a résztvevőket pontokkal ábrázoljuk, és az egymással táncolókat ábrázoló pontokat egy-egy vonallal kötjük össze, egy *gráf* szögpontjaihoz és éleihez jutunk. Ha a vonalak esetleg metszik egymást, metszéspontjukat nem mondjuk a gráf szögpontjának.

A kapott gráfot *páros gráfnak* mondjuk, mert szögpontjai két osztályba sorolhatók (ti. a fiúkat és a lányokat ábrázoló szögpontokéba) olyan módon, hogy minden él két más-más osztályba tartozó szögpontot köt össze. Kiegészíthetjük ezt a gráfot azáltal, hogy éllel kötünk össze minden más-más osztályba tartozó két szögpontot. Ennek az élei tehát kétfélék: vagy szerepeltek már az eredeti gráfban is, vagy csak utóbb csatoltuk hozzá. Ezt a kétféleséget azzal szemléltethetjük, hogy az éleket két színnel színezzük meg.

Mondhatjuk tehát, hogy feladatunk egy két színnel megfestett *teljes páros gráfról* szól. Bármelyik szögpontot tekintjük is, a belőle kiinduló élek a feladat feltevése szerint nem mindannyian ugyanolyan színűek. A feladat már bebizonyított állítása szerint található az ilyen gráfban négy csatlakozó él által alkotott „négyszög”, amelynek az élei váltakozva más-más színűek.

Ez az átfogalmazás már a bizonyítás során is alkalmazható lett volna. Az olvasóra hagyjuk, hogy ezt a valamivel szemléletesebb megfogalmazást végiggondolja. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy a két szín között nincs semmiféle szerepkülönbség. Ez annak felel meg, hogy eredeti feladatunk tartalma mit sem változik, ha benne az „egymással táncolt" és „egymással nem táncolt" fogalmakat felcseréljük. Ha másodszor is összegyűlnek a résztvevők, de most csak azok táncolnak egymással, akik az első alkalommal nem táncoltak, akkor is ugyanazok elégítik ki a feladat állításának követelményeit.

Megoldásunk gondolatmenete változatlanul alkalmazható akkor is, ha nem teljes páros gráfról, hanem *teljes gráfról* beszélünk, azaz olyanról, amelyben minden szögpontpárt él köt össze. Ennek az ellenőrzését is az olvasóra hagyjuk. Megelégszünk azzal, hogy az így bizonyított állítást a következő szemléletes alakban adjuk elő: Egy társaságban egyesek ismerik egymást, mások nem; senki sem ismer mindenkit, de mindenkinek van ismerőse a társaságban; kiválasztható akkor a társaság négy tagja, s ezek leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy két szomszédja közül mindenki csak az egyiket ismerje. Ehhez az eredményhez az első megoldás módszerével is könnyen eljuthattunk volna.

III. megoldás. Feltesszük, hogy a táncmulatság résztvevői közül nem választhatók ki négyen a követelményt kielégítő módon, s ebből a feltevésből ellentmondásra következtetünk, ti. arra, hogy akkor a táncmulatságnak végtelen sok résztvevője van. Ezáltal a feladat állításának helyességét bizonyítjuk be.

Legyen L_1 az egyik lány és F_1 olyan fiú, aki táncolt L_1-gyel. Legyen L_2 olyan lány, aki nem táncolt F_1-gyel, és F_2 olyan fiú, aki táncolt L_2-vel. Megállapíthatjuk, hogy F_2 táncolt L_1-gyel, mert különben $(L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2)$ kielégítené a feladat követelményét. Az eddig említett résztvevők közül eszerint csak L_2 és F_1 nem táncoltak egymással.

Tegyük fel, hogy már találtunk olyan

$$L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2,\ \ldots,\ L_k,\ F_k$$

résztvevőket, akik közül ketten csak akkor nem táncoltak, ha a lány indexe a fiúénál nagyobb. Ez volt a helyzet $k = 2$ esetében. Megmutatjuk most, hogy a sorozat kiegészíthető L_{k+1}, F_{k+1} résztvevőkkel olyan módon, hogy a kiegészített sorozat is rendelkezzék az eredeti sorozat tulajdonságával. Ebből majd valóban következik, hogy a kiegészítés minden határon túl folytatható, hogy tehát végtelen sok résztvevő van.

Minthogy F_k táncolt az $L_1, \ldots, L_k$ lányok mindegyikével, van olyan további L_{k+1} lány, akivel nem táncolt. Ez az L_{k+1} lány nem táncolt az $F_1, \ldots, F_{k-1}$ fiúkkal sem, pl. F_i-vel azért, mert különben $(L_k,\ F_k,\ L_{k+1},\ F_i)$ kielégítené a követelést. Minthogy L_{k+1} nem táncolt az $F_1, \ldots, F_k$ fiúk egyikével sem, van olyan további F_{k+1} fiú, akivel táncolt. Ez az F_{k+1} fiú táncolt az $L_1, \ldots, L_k$ lányokkal is, pl. L_i-vel azért, mert az ellenkező esetben $(L_i,\ F_i,\ L_{k+1},\ F_{k+1})$ kielégítené feladatunk követelését. Ezek szerint a kiegészített

$$L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2,\ \ldots,\ L_k,\ F_k,\ L_{k+1},\ F_{k+1}$$

sorozat valóban rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy egy sorozatbeli lány és fiú csak akkor nem táncolt egymással, ha kettejük indexe közül a lányé a nagyobb.

Megjegyzés. Megoldásunk arra is rámutatott, hogy a feladat állítása végtelen sok résztvevő, pontosabban végtelen sok fiú és végtelen sok lány részvétele esetén már nem helyes. Egy ellenpéldát, talán még mindig szemléletesen, a következőképpen adhatunk elő: Egy végtelen nagy társaságban senkinek a magassága sem éri el a 180 cm-t, de bármily kevéssel kisebb magasságot adunk is meg, már található olyan fiú is és olyan lány is, aki azt a magasságot eléri; minden fiú csak a nála kisebb lányokkal táncol. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor a feladat feltevései teljesülnek, viszont nem választható ki két fiú és két lány a feladat követelményét kielégítő módon.

Ez az ellenpélda természetesen megszövegezhető úgy is, hogy csak gráfokról szólunk. Felvetjük most a megfelelő kérdést végtelen teljes gráfokra is. Kérdezzük tehát, hogy ha egy végtelen sok szögpontú teljes gráf éleit úgy színezzük meg két színnel, hogy egy szögpontból se induljon ki csupa ugyanolyan színű él, vajon mindig igaz-e, hogy a gráf tartalmaz váltakozó színű négyszöget. Olyan példát adunk meg, amely mutatja, hogy ez sem igaz. Tartozzék a természetes számok mindegyikéhez egy-egy szögpont; az a, b számokhoz tartozó szögpontokat összekötő él legyen piros vagy kék aszerint, hogy a és b nagyobbika páros-e vagy páratlan. Könnyű ellenőrizni, hogy itt a feltételek teljesülnek, viszont váltakozó színű négyszög nem található.

IV. megoldás. Tudjuk, hogy minden fiúhoz található olyan lány, akivel nem táncolt. Lehetséges, hogy bármely két fiúhoz is található olyan, akivel egyikük sem táncolt. Talán bármely három vagy esetleg még több fiúhoz is található mindig ilyen lány. Van mindenesetre egy legnagyobb k érték, amelyre még igaz, hogy bármely k fiúhoz található olyan lány, akivel egyikük sem táncolt. Ez a k kisebb, mint a táncmulatságon résztvevő fiúk száma, hiszen minden lány táncolt legalább egy fiúval.

Minthogy $k + 1$ már nem rendelkezik k tulajdonságával, kiválasztható $k + 1$ fiú:

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_{k+1}$$

olyan módon, hogy minden lány táncolt valamelyikükkel. Ha közülük egyet, pl. F_1-et elhagyjuk, a megmaradó k fiúhoz k tulajdonsága miatt található olyan L_1 lány, akivel egyikük sem táncolt, s ezért vele a $k+1$ fiú közül csak F_1 táncolt. Ugyanígy okoskodhatunk, ha a $k + 1$ fiú közül nem F_1-et, hanem egy másikat hagyunk el. Ilyen módon olyan

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{k+1}$$

lányokhoz jutunk, akiknek mindegyike csak az ugyanolyan indexű fiúval táncolt a $k + 1$ fiú közül.

Minthogy $k \geq 1$, az F_1, F_2 fiúkról és az L_1, L_2 lányokról minden esetben szó lehet, s ezek kielégítik a feladat követelményét.

Megjegyzés. Valamivel rövidebb volna ez a megoldás, ha befejezésekor csak L_1 és L_2 létezésére következtetnénk, hiszen csak erre volt szükség. Így viszont a következő, a feladat állításánál többet mondó eredményhez is eljutottunk: Ha egy táncmulatságon minden lány táncol legalább egy fiúval, és bármely k fiúhoz található olyan lány, akivel egyikük sem táncolt, akkor kiválasztható a résztvevők közül k fiú és k lány úgy, hogy ezek mindegyike táncolt ezek valamelyikével, mégpedig mindenki csak eggyel.

Megoldásunk gondolatmenete ismét alkalmazható akkor is, ha nem egy teljes páros gráf, hanem egy teljes gráf két színnel való megszínezéséről van szó. Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy így a következőképpen megfogalmazható eredményhez jutunk: Egy társaságban mindenkinek van ismerőse, de a társaság bármely k tagjához található olyan, akit egyikük sem ismer; ekkor kiválasztható a társaságnak $2k$ tagja, s ezek leültethetők egy asztal két oldalán olyan módon, hogy a szemközti oldalon ülők közül mindenki csak a vele szemben ülőt ismerje.

Harmadik feladat. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív számokra*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

I. megoldás. Be kell bizonyítanunk, hogy a köbgyök alatti kifejezés nem nagyobb a bal oldal köbénél. Felhasználjuk a számtani és a mértani középre vonatkozó ismert egyenlőtlenséget, amely szerint két szám szorzata nem lehet a számtani közepük négyzeténél nagyobb. Ezt kétszer is alkalmazva

$$\begin{aligned}\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} &= \frac{1}{2}\left[ab\frac{c+d}{2}+cd\frac{a+b}{2}\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\frac{a+b}{2}\right] = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4} \leq \\ &\leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\frac{a+b+c+d}{4} = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.\end{aligned}$$

Elég most már csak azt igazolnunk, hogy

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Ez abból adódik, hogy a kétoldali kifejezések négyzetének különbsége

$$\begin{aligned}&\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{16}\left[3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right] = \\ &= \frac{1}{16}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\right] \geq 0.\end{aligned}$$

Megjegyzés. A feladat szövegében felesleges az a megszorítás, hogy a, b, c, d pozitív számok. Ezt megoldásunk sem használta fel. Igaz ugyan, hogy hivatkoztunk a számtani és mértani közép egyenlőtlenségére, és mértani középről csak pozitív értékek körében beszélhetünk, viszont pozitív értékekre való szorítkozás nélkül is igaz, hogy két szám szorzata nem lehet a számtani közepük négyzeténél nagyobb.

Megoldásunk az eredetinél erősebb

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

egyenlőtlenséget bizonyította be. A következő megoldások is ezt igazolják majd.

Megoldásainkban többféle középérték szerepel. A pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani (aritmetikai), mértani (geometriai), harmonikus és négyzetes (kvadratikus) közepét az

$$A(a_1,\ldots,a_n) = \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n),$$

$$G(a_1,\ldots,a_n) = \sqrt[n]{a_1\ldots a_n},$$

$$H(a_1,\ldots,a_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}},$$

$$Q(a_1,\ldots,a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

képletek adják meg. Ezek között sokféle egyenlőtlenség állapítható meg. Két számra vonatkozólag már felhasználtuk a $G \le A$ egyenlőtlenséget. Négy számra vonatkozólag bebizonyítottuk, hogy $A \le Q$. Két számra vonatkozólag közvetlenül ellenőrizhető a

$$G^2 = AH$$

összefüggés, és ebből $G \le A$ felhasználásával $H \le G$, és így $H \le A$ is adódik. Bizonyítás nélkül említjük meg, mert nem lesz szükségünk rá, hogy az itt említett egyenlőtlenségek n szám közepeire is teljesülnek.

II. megoldás. Jelölje A, G, H, Q az a, b, c, d számok megfelelő közepeit. Feladatunk állítása köbreemelés után $Q^3 \ge G^4/H$ alakban írható, s mi a többet mondó $G^4 \le A^3H$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk be.

Jelölje A_1, G_1, H_1 az a, b számok, A_2, G_2, H_2 pedig a c, d számok megfelelő közepeit. Nyomban belátható, hogy ezekre

$$A(A_1,\ A_2) = A, \qquad G(G_1,\ G_2) = G, \qquad H(H_1,\ H_2) = H.$$

Mivel $G_1^2 = A_1H_1$, és hasonló érvényes bármely két szám közepeire,

$$\begin{aligned} G^4 &= G_1^2G_2^2 = A_1H_1 \cdot A_2H_2 = A_1A_2 \cdot H_1H_2 = \\ &= A(A_1, A_2) \cdot H(A_1, A_2) \cdot A(H_1, H_2) \cdot H(H_1, H_2). \end{aligned}$$

Minthogy pedig $H(A_1, A_2) \le A(A_1, A_2)$, és a hasonló $H_1 \le A_1$, $H_2 \le A_2$ egyenlőtlenségekből $A(H_1, H_2) \le A(A_1, A_2)$ következik, a fenti egyenlőségből a bizonyítandó $G^4 \le A^3H$ egyenlőtlenséghez jutunk.

III. megoldás. Felhasználjuk azt, hogy ha négy szám nem egyenlő, akkor van közöttük a számtani középüknél nagyobb, és van kisebb is. Legyen például $c < A < d$, ahol A ismét az a, b, c, d számok számtani közepét jelöli. Legyen $c_1 = c + d - A$ és $d_1 = A$. Ezekre

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= c + d, \\ c_1d_1 &= (c + d - A)A = (A - c)(d - A) + cd > cd. \end{aligned}$$

Ha tehát az a, b, c, d számok helyébe az a, b, c_1, d_1 számokat írjuk, számtani középük változatlanul A marad, viszont A is szerepel közöttük, illetőleg többször szerepel, mint ahányszor szerepelt, és a feladat egyenlőtlenségének jobb oldala

$$ab(c + d) + (a + b)cd < ab(c_1 + d_1) + (a + b)c_1d_1$$

miatt növekszik.

Ha tehát a, b, c, d nem egyenlők, akkor megváltoztathatók úgy, hogy számtani középük változatlanul A maradjon, A többször szerepeljen közöttük, mint ahányszor szerepelt, s hogy a feladatbeli köbgyök értéke növekedjék. Ezt az eljárást a szükség szerint megismételve mindegyik szám helyébe A lép, s a köbgyök értéke állandóan növekszik. Ha pedig mindegyik szám A-val egyenlő, akkor a köbgyök értéke is A. Eszerint a köbgyök értéke eredetileg is A-nál kisebb vagy esetleg vele egyenlő volt, s ez az, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Ennek a megoldásnak a gondolatmenete változatlanul alkalmazható akkor is, ha nem négy számról és a belőlük képezhető három tényezős szorzatok összegéről, hanem n számról és az ezekből képezhető k tényezős szorzatok összegéről van szó. Így azt kapjuk, hogy ez az összeg nem lehet nagyobb, mint $\binom{n}{k}A^k$.

Kiemeljük ennek az eredménynek azt a speciális esetét, amikor $k = n - 1$. Ebben az esetben a vizsgált összeg nG^n/H. Így tehát a

$$G^n \le A^{n-1}H$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amely $n = 2$ esetén egyenlőség formájában teljesül, $n = 4$ esetén pedig a megoldásainkban bizonyított egyenlőtlenséggel azonos.

Gondolatmenetünk még a $k = n$ esetben is alkalmazható, amikor csak egyetlen szorzatról van szó, s így az n szám közepeire érvényes $G \le A$ egyenlőtlenség bizonyításához jutunk.