Az 1964. évi Országos Középiskolai Matematikai Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok között szerepelt a következő: *Ha* α, β, γ *egy háromszög szögei, akkor* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 2$. Több versenyző megmutatta, hogy a bal oldal 3/2-nél sem lehet nagyobb, és ekkora is csak a szabályos háromszög esetében lesz. [1]

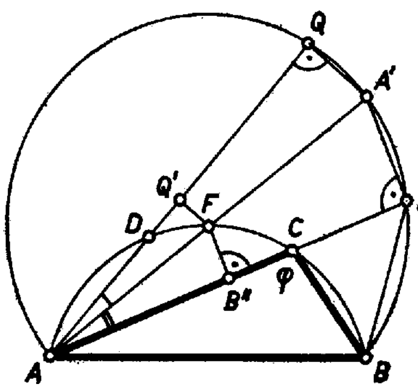
Kézenfekvő a szögek szinuszainak az összegére is felső korlátot keresni. Az alábbiakban mindkét összeget alkalmas távolságösszeggel fogjuk szemléltetni és megmutatjuk, hogy *mindkét összeg a szabályos háromszög esetén a legnagyobb,* azaz

(1) $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2},$$

(2) $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mindkét egyenlőtlenséget azzal bizonyítjuk, hogy egy háromszöget, ha nem szabályos, szabályossal helyettesítünk olyan lépésekben, melyek a kérdéses összeget növelik.

Vizsgáljuk (2) bal oldalának geometriai jelentését. Legyen a feladatbeli háromszög köré írható kör átmérője egységnyi, ekkor az ABC háromszög oldalai $AB = \sin\gamma$, $BC = \sin\alpha$, $AC = \sin\beta$, és azt akarjuk vizsgálni, hogy ezen egység-átmérőjű körbe írható háromszögek közül melyiknek a kerülete a legnagyobb.



1. ábra

Rögzítsük a háromszög köré írt kör ACB ívét, és mozgassuk a C csúcsot ezen a köríven (1. ábra). Vajon a C pont mely helyzetére lesz az ABC háromszög kerülete, vagy ami ugyanazt jelenti, az $AC + CB$ összeg a legnagyobb?

Bebizonyítjuk, hogy *az* $AC + CB$ *összeg akkora legnagyobb, ha* C *az* AB *körív felezőpontja, és növekszik, ha* C *közeledik a felezőponthoz.* E segédtételünkkel lehetővé lesz mind (2), mind (1) igazolása.

Mérjük fel valamennyi AC húr meghosszabbítására a $CB' = CB$ szakaszt. Az így kapott B' pontokból az AB szakasz $\varphi/2$ szögben látszik, ahol φ az AB látószöge a szóban forgó ívről. Valóban, a BCB' egyenlő szárú háromszög alapon levő szöge fele a C-nél levő külső szögnek, ami φ. Tehát a B' pontok az AB húrhoz tartozó $\varphi/2$ látószögű köríven vannak. Ez a körív hosszabb a félkörnél, mert $\varphi/2 < 90°$, így A-tól legtávolabbi pontját az A-ból induló AA' átmérő metszi ki. E körív középpontja az eredeti AB körív F felezőpontja, mert erre $AF = FB$, és $AFB\sphericalangle = \varphi$. Megállapíthatjuk tehát, hogy az utóbbi körív $AC + CB = AC + CB' = AB'$ húrja akkor a legnagyobb, ha $C \equiv F$, és annál nagyobb, minél közelebb van az F ponthoz az AC (CB) húr C végpontja. Ez utóbbi azért igaz, mert ha $FD < FC$, akkor $DAF\sphericalangle < FAC\sphericalangle$, és így – F merőleges vetületét AQ-n Q'-vel, AB'-n B''-vel jelölve – $FQ' < FB''$, mert az $AQ'F$ és $AB''F$ derékszögű háromszögek átfogói egyenlők. Ezért igaz az is, hogy ha $0 < \widehat{QA'} < \widehat{B'A'}$ – a rövidebb ívekről van szó a mondott végpontok között –, akkor $AB' < AQ < AA'$.

Most már választ adhatunk első kérdésünkre. Megmutatjuk, hogy (2) bal oldala a szabályos háromszög esetén a legnagyobb, azaz *egy körbe írható háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.*

Legyen az ABC háromszögnek 60°-tól különböző szöge. Ekkor szögei közt biztosan van olyan, amelyik nagyobb, és olyan, amelyik kisebb, mint 60°. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a háromszög legnagyobb szöge a B csúcsnál, a legkisebb szöge az A csúcsnál legyen (4. ábra). Így C-nél hegyesszög van. Tükrözzük az ABC háromszöget az AB oldal felező merőlegesére. Az ABC' tükörkép egybevágó ABC-vel, tehát kerületük egyenlő.

Tekintsük azt az A kezdőpontú félegyenest, mely az AB félegyenessel 60°-os szöget zár be, és AB-nek ugyanazon oldalán van, mint C. Messe ez a félegyenes a háromszög köré írt kört D-ben. Mivel $BAC\sphericalangle < 60°$, és $BAC'\sphericalangle > 60°$, azért az AD félegyenes a CAC' szögtartomány belsejében halad. Ugyanez a szögtartomány tartalmazza a kör ACB ívének F felezőpontját is. Eszerint D közelebb van F-hez, mint akár C, akár C', így segédtételünk szerint az ABD háromszög kerülete nagyobb az ABC háromszög kerületénél.

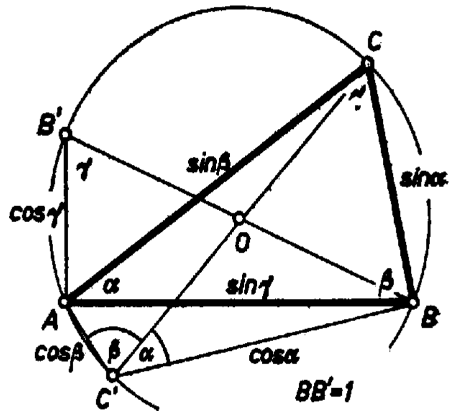
Ha most a kör BAD ívének G felezőpontját tekintjük, akkor – hasonlóan – a BGD háromszög kerülete nagyobb a BAD háromszög kerületénél vagy egyenlő vele, a BGD háromszög pedig szabályos. (Egyenlő akkor, ha G egybeesik A-val, $ACB\sphericalangle = 60°$.)

[1] *Surányi János:* Az 1964. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K. M. L. 29 (1964) 106. o.

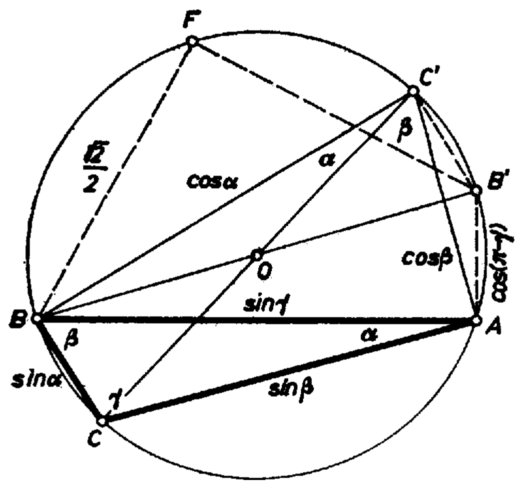
Ezzel igazoltuk, hogy a körbe írt szabályos háromszög kerülete bármely más, ugyanezen körbe írt háromszög kerületénél nagyobb; így (2) bal oldala akkor maximális, ha $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, azaz

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sqrt{3}/2,$$

és egyenlőség csak $\alpha=\beta=\gamma$-ra teljesül.



2. ábra



3. ábra

Most adjunk (1) bal oldalának is geometriai jelentést. (A körülírt kör átmérője most is egységnyi legyen.) Tükrözzük a háromszög B és C csúcsát az O középpontra, tükörképeik legyenek B' és C' (2. és 3. ábra). A kerületi szögekre vonatkozó tétel miatt

$$B'A=\cos\gamma,\qquad \text{illetve}\qquad \gamma>90^\circ \text{ esetén } B'A=\cos(\pi-\gamma),\ \text{és}$$
$$C'A=\cos\beta,\qquad C'B=\cos\alpha.$$

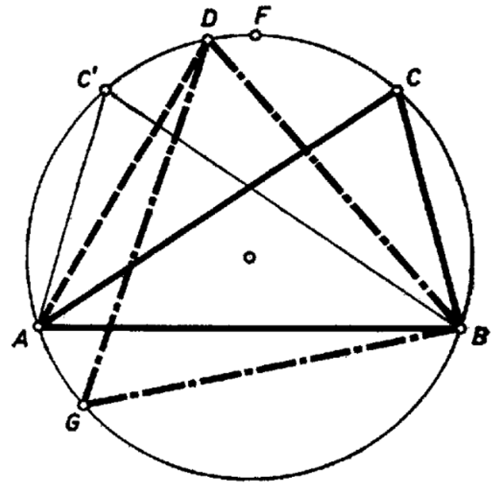
(1) bal oldalát elég hegyesszögű háromszögre vizsgálni. Ha ugyanis az ABC háromszög nem hegyesszögű ($\gamma\ge 90^\circ$), a háromszög-egyenlőtlenség miatt (3. ábra)

$$\cos\beta+\cos\gamma=\cos\beta-\cos(\pi-\gamma)=AC'-AB'\le B'C',$$

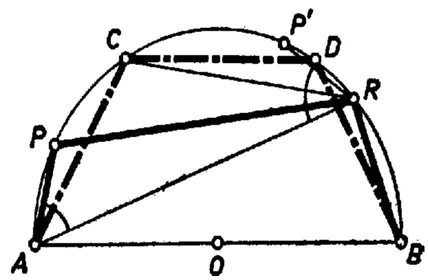
ahol az egyenlőség csak $\gamma=90^\circ$-ra teljesül. Ezért segédtételünk miatt

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\cos\alpha+B'C'\le BF+FB'=\sqrt{2}<\frac{3}{2}.$$

Mellékesen tehát azt is beláttuk, hogy (1) bal oldala – nem hegyesszögű háromszögekre szorítkozva –, maximálisan $\sqrt{2}$ lehet, és ezt a határt csak $\alpha=\beta=45^\circ$ esetén éri el.



4. ábra



5. ábra

Ha háromszögünk hegyesszögű, akkor tartalmazza a körülírt kör O középpontját, s ekkor az (1) bal oldala a BB' egységátmérőjű félkörbe írt három szakaszból (húrból) álló törött vonal hosszával egyenlő (2. ábra). Így arra a kérdésre kell választ adnunk, hogy az AB félkörbe írt $AP + PR + RB$ húrösszeg (5. ábra) mikor a legnagyobb.

A félkör AP, PR, RB ívei között legyen olyan, melyhez $30°$-tól különböző kerületi szög tartozik. Ekkor van köztük olyan, amelyikhez $30°$-nál nagyobb, és olyan is, amelyikhez kisebb kerületi szög tartozik, feltehetjük, hogy az AP ívhez tartozik a legkisebb, és a következő PR-hez a legnagyobb kerületi szög. (Különben véve P-nek és R-nek O-ra való tükörképét, P'-t és R'-t, az $APRBP'R'$ centrálszimmetrikus hatszög csúcsaiból vett alkalmas egymásra következő 4 megfelel feltételünknek.) Rajzoljuk meg azt az R kezdőpontú félegyenest, mely RA-val $30°$-os szöget alkot, és RA ugyanazon oldalán van, mint P, messe ez az APR ívet C-ben. Mivel $ARP\sphericalangle < 30°$ és $PAR\sphericalangle > 30°$, ha az AR felező merőlegesére P-t tükrözzük, az RC félegyenes a PRP' szögtartományban halad, és ugyanez a szögtartomány tartalmazza az APR körív felezőpontját. Az előzőek szerint, mivel C e felezőponthoz közelebb van, mint P vagy P'

$$AC + CR > AP + PR.$$

Ha most tekintjük a CRB körív D felezőpontját, akkor

$$CD + DB \geq CR + RB,$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha RB ívhez $30°$-os kerületi szög tartozik. Így

$$AC + CD + DB > AP + PR + RB$$

és

$$AC = CD = DB.$$

Ezzel beláttuk, hogy a félkörbe írt három, sugárnyi hosszú húr összege nagyobb bármely más e félkörbe írt megfelelő húr összegénél, tehát *egy AB félkörbe írt $AP + PR + RB$ húrösszeg – ha a pontok sorrendje A, P, R, B – akkor a legnagyobb, ha $AP = PR = RB$.* Így (1) bal oldala akkora legnagyobb, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, azaz

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2,$$

és egyenlőség csak $\alpha = \beta = \gamma$ esetén áll.

A továbbiakban (1) és (2) egy-egy általánosítását adjuk.

Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor bármely pozitív egész n-re

$$\sqrt[n]{\sin\alpha} + \sqrt[n]{\sin\beta} + \sqrt[n]{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \tag{3}$$

továbbá, ha α, β, γ egyike sem tompaszög, akkor

$$\sqrt[n]{\cos\alpha}+\sqrt[n]{\cos\beta}+\sqrt[n]{\cos\gamma}+\leq 3\sqrt[n]{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

A bizonyítást csak az $n=2^k$ esetre végezzük el k-ra vonatkozó teljes indukcióval.

A $k=0$-ra (egy szám „első gyökén” magát a számot értve) bizonyítottuk az állítást. Tegyük fel, hogy (3) és (4) fennáll $n=2^k$-ra, ahol $k>0$; bebizonyítjuk, hogy akkor fennáll $n=2^{k+1}$-re is. Tekintsük a következő összegeket:

$$\sqrt[2^{k+1}]{\sin\alpha}+\sqrt[2^{k+1}]{\sin\beta}+\sqrt[2^{k+1}]{\sin\gamma}, \tag{5}$$

$$\sqrt[2^{k+1}]{\cos\alpha}+\sqrt[2^{k+1}]{\cos\beta}+\sqrt[2^{k+1}]{\cos\gamma}. \tag{6}$$

Felhasználjuk, hogy nem negatív számok mértani közepe nem nagyobb számtani közepüknél. Ha u, v, $w\geq 0$, akkor

$$(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w})^2=(u+v+w)+2(\sqrt{uv}+\sqrt{uw}+\sqrt{vw})\leq(u+v+w)+$$
$$+2\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u+w}{2}+\frac{v+w}{2}\right)=3(u+v+w).$$

Eszerint (5) és (6) négyzetére

$$\left(\sqrt[2^{k+1}]{\sin\alpha}+\sqrt[2^{k+1}]{\sin\beta}+\sqrt[2^{k+1}]{\sin\gamma}\right)^2\leq 3\left(\sqrt[2^k]{\sin\alpha}+\sqrt[2^k]{\sin\beta}+\sqrt[2^k]{\sin\gamma}\right)\leq 9\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

illetve

$$\left(\sqrt[2^{k+1}]{\cos\alpha}+\sqrt[2^{k+1}]{\cos\beta}+\sqrt[2^{k+1}]{\cos\gamma}\right)^2\leq 3\left(\sqrt[2^k]{\cos\alpha}+\sqrt[2^k]{\cos\beta}+\sqrt[2^k]{\cos\gamma}\right)\leq 9\sqrt[2^k]{\frac{1}{2}}$$

igaz az indukciós feltevés miatt, amiből négyzetgyökvonással adódik az állítás.

Pogáts Ferenc