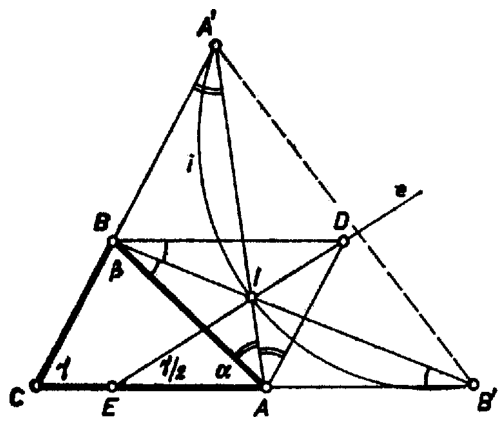
Az 1261. feladat [1] tetszés szerinti háromszögre fogalmazva az ABC háromszög megszerkesztését kívánta, ha adott a $p = AB + BC$ és a $q = AB + AC$ szakasz, továbbá a $\gamma = ACB\sphericalangle$. Az alábbiakban egy olyan megoldást mutatunk be, amelyik csupán az I. gimnázium tananyagára támaszkodik, a hasonlóság fogalmát sem használja fel [2], viszont nem könnyű belátni, hogy valóban a kívánt tulajdonságú háromszöget kapunk. Ennek bizonyítását feladatul fogjuk kitűzni[3].



Az áttekinthetőség kedvéért tegyük fel, hogy ha a két távolság különböző, a kisebbet jelöltük p-vel. Ez nem jelent megszorítást. Mérjük rá a CA oldal A-n túli és a CB oldal B-n túli meghosszabbítására az $AB' = BA' = AB$ távolságot, jelöljük AA' és BB' metszéspontját I-vel. Ekkor $A'C = p$, $B'C = q$, és az ABB' és ABA' egyenlő szárú háromszögek szárai alkotta külső szögek az ABC háromszög $BAC\sphericalangle = \alpha$ és $ABC'\sphericalangle = \beta$ szöge. Így

$$ABB'\sphericalangle = AB'B\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}, \quad BAA'\sphericalangle = BA'A\sphericalangle = \frac{\beta}{2}, \text{ továbbá}$$

$$A'IB'\sphericalangle = AIB\sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Húzzunk másrészt párhuzamost A-ból BC-vel és B-ből AC-vel, metszéspontjuk legyen D. Ekkor $ABD\sphericalangle = \alpha$, $BAD\sphericalangle = \beta$. Így AI és BI az ABD háromszög szögfelezői, tehát DI is felezi a D-nél levő γ nagyságú szöget, mert a harmadik szögfelező is átmegy I-n. Jelöljük AC és DI metszéspontját E-vel. Ekkor $AED\sphericalangle = EDB\sphericalangle = \gamma/2 = EDA\sphericalangle$, tehát az ADE háromszög egyenlő szárú, így

$$CE = CA - EA = CA - AD = CA - CB =$$
$$= (CA + AB) - (CB + AB) = q - p.$$

Meggondolásaink a következő szerkesztéshez vezettek:

Szerkesszünk egy $A'B'C$ háromszöget, amelynek két oldala $A'C = p$, $B'C = q$, és a köztük levő szög γ.

Rajzoljuk meg azt az i körívet, amelyről az $A'B'$ szakasz $180^\circ - \gamma/2$ szögben látszik és amelyik az $A'B'$ egyenes ugyanazon oldalán van, mint a C pont.

Mérjük rá CB'-re a $CE = q - p$ távolságot.

Az E-n átmenő és a CB' iránnyal $\gamma/2$ szöget bezáró e egyenes metszi ki i-ből az I pontot.

Végül az A és B pont az $A'I$-nek $B'C$-vel és $B'I$-nek $A'C$-vel való metszéspontja.

Ha az elemzés gondolatmenetét meg akarjuk fordítani, nehéz hol elkezdeni. Az A-ból BC-vel és B-ből AC-vel párhuzamos egyenes e-n metszi-e egymást? A keletkező háromszögnek AA', BB' szögfelezői-e, AB, AB' és $A'B$ egyenlők-e? Egyik sem látszik könnyű kérdésnek. A megoldást, a leírt szerkesztés helyességének igazolását feladatul tűzzük ki.

[1] Lásd 198. old.

[2] Hasonlóan a közölt III. megoldáshoz, 200. old.

[3] Lásd 1398. feladat, 222. old.