1. Az 1964. évi Arany Dániel matematikai verseny egyik feladatában[1] azt kellett bizonyítani, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor $a^3+b^3+c^3 \geqq a^2b+b^2c+c^2a$.

A bizonyításban nehézséget okozott az, hogy a jobb oldalon álló kifejezés nem szimmetrikus; emiatt nem lehet feltenni, hogy $a \geqq b \geqq c$. Azt még feltehettük, hogy a a legnagyobb, de ezzel már meghatároztuk, hogy „melyik a b és melyik a c", mégpedig b a jobb oldalon az a^2-tel és c négyzete a-val egy tagban szerepel. Amennyiben az egyenlőtlenséget a fenti feltétellel igazoljuk, akkor $a \geqq c \geqq b$ esetén azt kapjuk, hogy $a^3+b^3+c^3 \geqq a^2c+c^2b+b^2a$.

Ha azonban azt tűzzük ki célul, hogy a fenti két egyenlőtlenség mindegyikét igazoljuk, akkor már feltehető, hogy $a \geqq b \geqq c$. Valóban, hiszen ha b-t és c-t felcseréljük, ezáltal a két egyenlőtlenség jobb oldala cserélődik fel, és ez, ha mindkét egyenlőtlenséget igazoljuk, nem okoz problémát.

Nézzük meg, hogyan lehet a két egyenlőtlenséget egyszerre igazolni. Tegyük fel, hogy $a \geqq b \geqq c$ és írjuk a két igazolandó egyenlőtlenséget a következő alakba:

(i)
$$aa^2+bb^2+cc^2 \geqq ac^2+ba^2+cb^2;$$
$$aa^2+bb^2+cc^2 \geqq ab^2+bc^2+ca^2.$$

Ha az $A=a^2$, $B=b^2$ és $C=c^2$ jelölést használjuk, akkor a feladatot következőképpen fogalmazhatjuk meg. Igazolni kell két a $a\,A+b\,B+c\,C \geqq a\,A'+b\,B'+c\,C'$ alakú egyenlőtlenség teljesülését, ahol A', B', C' az A, B, C számokat jelenti valamilyen sorrendben, és $a \geqq b \geqq c$.

Itt többféle általánosítási lehetőség is kínálkozik.

a) Az igazolandó két egyenlőtlenség helyett több egyenlőtlenséget is igazolhatunk egyszerre úgy, hogy az egyenlőtlenség jobb oldalára A', B' és C' helyébe az A, B és C számokat az összes lehetséges sorrendben beírjuk (ezt 6-féleképpen tehetjük meg).

b) Az egyenlőtlenséget (illetve egyenlőtlenségeket) nem három-, hanem többtagú összegre igazoljuk.

c) Eltekintünk attól, hogy A, B, C az a, b, c számoktól függnek.

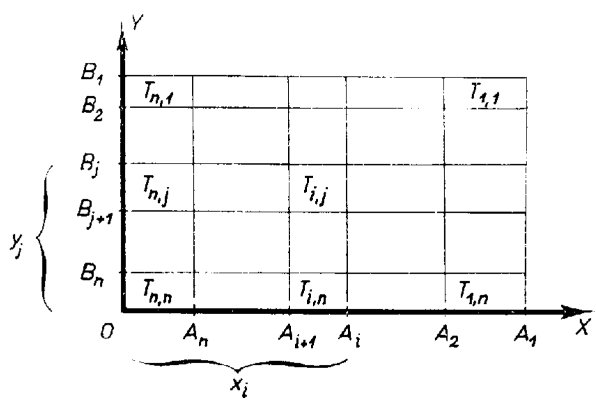
Az első két általánosítás egyszerre is elvégezhető, és mint látni fogjuk, az egyenlőtlenség így is igazolható; sőt bizonyos fokig a harmadik általánosítási lehetőséggel is élhetünk. (Ez a feltétel teljesen nyilván nem is hagyható el.) Annyit fogunk csak feltenni, hogy a szereplő „nagy betűk" ugyanolyan nagyság szerinti sorrendben vannak, mint a megfelelő „kis betűk". A következőket fogjuk kimutatni:

Legyenek $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$ és $y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n$ pozitív számok, amelyekre $y_i = y_{i+1}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_i = x_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$. Jelöljük u_1, u_2, …, u_n-nel az y_1, y_2, …, y_n számok egy tetszés szerinti sorrendben való felírását. Ekkor:

(ii)
$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \geqq x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n,$$

és egyenlőség csak az $u_1=y_1$, $u_2=y_2$, …, $u_n=y_n$ esetben áll.[2]

Az alábbiakban erre az egyenlőtlenségre geometriai bizonyítást adunk.



2. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel először, hogy az x_i-k különbözők $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Tekintsünk a sík valamely O pontjából kiinduló két egymásra merőleges félegyenest. Vegyük fel az egyiken az O-tól x_i távolságra levő A_i, a másikon az O-tól y_j távolságra levő B_j pontokat $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. E pontokból kiindulva húzzunk a másik félegyenessel (azzal, amelyiken nincs rajta a pont) párhuzamos félegyenest (1. ábra).

Tekintsük most $i \neq n$ esetén az A_i és A_{i+1} pontokon, $i=n$ esetén az A_n és O pontokon át húzott párhuzamos egyenespárt; valamint $j \neq n$ esetén a B_j és B_{j+1} pontokon, $j=n$ esetén a B_n és O pontokon át húzott párhuzamos egyenespárt. Mivel az x_i-k és y_i-k egymás közt különbözők, ezért az A_i pontok nem esnek egymásra, és nyilván O-tól

[1] *Fried Ervin:* Az 1964. évi Arany Dániel tanulóversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása (kezdők versenye) X. M. L. XXX (1965) 1–2. o.

[2] Ezen egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható: *Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.:* Matematikai versenytételek II. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 44. o.

is különböznek, és hasonlóan a B_f pontok is egymástól és O-tól különbözők, így a két egyenespár minden i, j számpár esetére egy-egy téglalapot határoz meg; jelöljük ezt $T_{i,j}$-vel.

Tekintsük most az $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n$ összeget. Legyen $u_i = y_j$, ekkor az összeg egyik tagja x_iy_j. Ez a szorzat megegyezik azon téglalap területével, melynek három csúcsa: A_i, O és B_j. Ezen téglalapot a párhuzamos egyenesek azon $T_{p,q}$ téglalapokra bontják fel, melyekre $p \geqq i$ és $q \geqq j$. Így x_iy_j e kis téglalapok területének összegével és az egész $x_1u_1 + x_2y_2 + \ldots + x_nu_n$ összeg is bizonyos $T_{p,q}$ téglalapok területének összegével egyenlő. Az összegben egyes $T_{p,q}$ téglalapok többször is fellépnek. (Például $T_{n,n}$ biztosan szerepel minden tag esetén, így n-szer lép fel.)

Azt, hogy hányszor lép fel egy-egy $T_{p,q}$ téglalap, következőképpen határozhatjuk meg. Gondolatban vágjunk ki n téglalapot, melyek szomszédos oldalainak hossza rendre x_1 és u_1, x_2 és u_2, $\ldots$, x_n és u_n, és e téglalapokat helyezzük rá az 1. ábrára úgy, hogy a x_i és u_i oldalhosszúságú téglalap három csúcsa A_i be, O-ba és B_J be essék (ha $u_i = y_j$). Mármost valamely $T_{p,q}$ téglalap nyilván pontosan annyiszor lép fel, ahány kivágott téglalap lefedi. Jelöljük a $T_{p,q}$ téglalapot lefedő kivágott téglalapok számát $n_{p,q}$-val.

Az a téglalap, amelynek három csúcsa A_i-be, O-ba és B_j-be esik, akkor fedi le a $T_{p,q}$ téglalapot, ha $i \leqq p$ és $j \leqq q$ egyszerre teljesül. Ha most $r \geqq p$ és $s \geqq q$, akkor $r \geqq p \geqq i$ és $s \geqq q \geqq j$ folytán minden a $T_{p,q}$-t lefedő kivágott téglalap lefedi $T_{r,s}$-t is, tehát

(iii) $$\text{ha} \quad r \geqq p \quad \text{és} \quad s \geqq q, \quad \text{akkor} \quad n_{r,s} \geqq n_{p,q}.$$

Visszatérve a $T_{p,q}$-t lefedő kivágott téglalapokra, azt kell meghatározni, hány olyan (A_i, O és B_j-he eső csúcsú) kivágott téglalap van, amelyre $i \leqq p$ és $j \leqq q$ egyszerre teljesül. Ilyen kivágott téglalap legfeljebb annyi van, ahány p-nél nem nagyobb i és hozzá q-nál nem nagyobb j található (ii) jobb oldalán. A feltételnek pontosan p számú i, és pontosan q számú j érték felel meg. Így a $T_{p,q}$ téglalapot lefedő kivágott téglalapok száma legfeljebb annyi, mint amekkora a p és q számok közül a kisebbik, vagy a közös értékük, ha a kettő egyenlő. Ezt a számot $\min(p,\, q)$-val szokás jelölni, így

(iv) $$n_{p,q} \leqq \min(p, q).$$

3. Térjünk rá most annak a megállapítására, hogy mikor lesz az $x_1u_1+x_2u_2+\ldots x_nu_n$ összeg a lehető legnagyobb. Ez biztosan teljesül akkor, ha a (iv) alatti egyenlőtlenségben minden $T_{p,q}$ téglalapra egyenlőség szerepel. Speciálisan szükséges, hogy $n_{i,i} = i$ legyen. Ekkor $n_{1,1} = 1$ alapján $T_{1,1}$-et biztosan lefedi kivágott téglalap. Ilyen kivágott téglalap pedig csak egy van, mégpedig az, melynek két csúcsa – az ábrára való ráhelyezés után – A_1 be és B_1-be esik. (O-t tovább nem említjük a kivágott téglalapok helyzetének leírásában.) Ezen kivágott téglalap pedig éppen az x_1y_1 szorzatnak felel meg. Tehát $u_1 = y_1$ kell, hogy legyen.

Ezt figyelembe véve hasonlóképpen megállapítható, hogy $u_2 = y_2$ és így tovább. Általában, ha már tudjuk, hogy $u_1 = y_1,\ u_2 = y_2,\ \ldots,\ u_{i-1} = y_{i-1}$, akkor következőképpen mutathatjuk ki, hogy $u_i = y_i$. A $T_{i,i}$-t lefedő i számú kivágott téglalap közül $i-1$ már $T_{i-1,i-1}$-et is lefedi. Ezen kivágott téglalapok csúcsai rendre az A_1 és B_1, A_2 és B_2, $\ldots$, A_{i-1} és B_{i-1} pontokba esnek. Ezért a $T_{i,i}$-t lefedő i-ik kivágott téglalap A_p és B_q csúcsára az teljesül, hogy p is és q is legalább i. Másrészt, mivel e kivágott téglalap a $T_{i,i}$ téglalapot lefedi, ezért mind p, mind q legfeljebb i lehet, amiből $p = q = i$ következik. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $u_i = y_i$. (Ez a bizonyítás speciális esetként tartalmazza $u_2 = y_2,\ u_3 = y_3,\ \ldots\ ,\ u_n = y_n$ bizonyítását, i helyére rendre 2-t, 3-at, $\ldots$, n-et téve.) Ezzel kimutattuk tehát a kívánt egyenlőtlenséget, és azt is, hogy egyenlőség csak akkor teljesül, ha minden i-re $u_i = y_i$.

Mint láttuk, az $u_i = y_i$ esetben, ha $p = q$, akkor (iv)-ben az egyenlőség teljesül. Kimutatjuk, hogy minden p, q párra egyenlőség áll fenn. Ugyanis $\min(p,q)$-t r-rel jelölve (iii) szerint $n_{p,q} \geqq n_{r,r}$ amiről viszont már tudjuk, hogy r-rel egyenlő; azaz $n_{p,q} \geqq r = \min(p,q)$. Ebből, és az (iv) egyenlőtlenségből pedig már adódik az $n_{pq,} = \min(p,q)$ egyenlőség.

4. Most egy hasonló típusú, de ellenkező irányú egyenlőtlenséget fogunk vizsgálni.

A fenti módszerrel azt is megállapíthatjuk, hogy az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok milyen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendje esetén lesz az $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n$ összeg a lehető legkisebb. Az előzőkben azt vizsgáltuk meg, hogy az egyes $T_{p,q}$ téglalapokat legfeljebb hány kivágott téglalap fedi le. Itt azt kell megnézni, hogy legalább mennyi.

Ha az A_i és B_j csúcsú kivágott téglalap nem fedi le a $T_{p,q}$ téglalapot, akkor vagy $i > p$, vagy $j > q$. Mivel i és j egyike sem nagyobb n-nél, ezért az első eset $n-p$, a második eset $n-q$ kivágott téglalapra teljesül. Ezen kivágott téglalapokon kívül a többi biztosan lefedi a $T_{p,q}$ téglalapot. Mivel összesen n darab kivágott téglalap van, ezért a $T_{p,q}$ téglalapot legalább $n-(n-p)-(n-q) = p+q-n$ kivágott téglalap fedi le. Persze, ha $p+q \leqq n$, akkor ez a megállapítás semmitmondó, ez esetben azt tudjuk, hogy a $T_{p,q}$ téglalapot legalább 0 darab kivágott téglalap fedi le. Így:

(v) $$n_{p,q} \geqq p+q-n, \text{ ha } p+q > n, \text{ és } n_{p,q} \geqq 0, \text{ ha } p+q \leqq n.$$

Amennyiben valamely $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$ összeg esetén (v)-ben mindig egyenlőség áll, akkor ez az összeg a lehető legkisebb lesz. Ehhez többek között szükséges az, hogy a $T_{i,n-i}$ téglalapot semmilyen i-re se fedje le egy kivágott téglalap sem, a $T_{i+1,n-i}$ téglalapot pedig pontosan egy fedje. Tegyük fel, hogy ez utóbbi téglalapot lefedő egyetlen kivágott téglalap csúcsai A_p és B_q. Ez azt jelenti, hogy $p \leqq i+1$ és $q \leqq n-i$. Ha mármost $p \leqq i$, vagy $q \leqq n-i-1$ volna, akkor e kivágott téglalap lefedné a $T_{i,n-i}$ vagy a $T_{i+1,n-i-1}$ téglalapot, melyeket a kívánt esetben egyetlen kivágott téglalap sem fedhet le. Így ez esetben a $T_{i+1,n-i}$ téglalapot lefedő kivágott téglalap csúcsai A_{i+1} és

B_{n-i}. Ez pedig azt jelenti, hogy az összeg megfelelő tagja $x_{i+1}y_{n-1}$ (azaz $u_{i+1} = y_{n-i}$ vagyis az y-ok éppen fordított sorrendben szerepelnek, mint az előző esetben). Ekkor lesz tehát a fenti összeg a lehető legkisebb, minden más esetben ennél nagyobb.

Itt is kimutatjuk, hogy $n_{p,q}$-ra az (v) alatti egyenlőtlenségben az egyenlőség áll fenn. Ha $p+q \leqq n$, akkor $q \leqq n-p$, és az (iii) alatti egyenlőtlenséget felhasználva: $n_{p,q} \leqq n_{p,n-p} \leqq 0$; ebből $n_{p,q} \leqq 0$ miatt $n_{p,q} = 0$ következik. – Ha pedig $p+q > n$, akkor $T_{p,q}$-t azok az A_{i+1} és B_{n-i} csúcsú kivágott téglalapok fedik le, melyekre $i+1 \leqq p$ és $n-i \leqq q$, azaz amelyekre $n-q \leqq i \leqq p-1$. Az ilyen téglalapok száma pedig $(p-1)-(n-q-1) = p+q-n$, amint állítottuk.

Végeredményül tehát a következőket kaptuk:

Legyenek $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, valamint $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$ pozitív számok, és $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az $y_1, y_2 \ldots, y_n$ számok valamely sorrendje. Legyen ezenfelül $M = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ és $m = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1$. Ekkor:

$$m \leqq x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \leqq M,$$

és egyenlőség a bal, illetve jobb oldalon csak akkor lehet, ha $u_1 = y_n, \quad u_2 = y_{n-1}, \quad \ldots, \quad u_n = y_1$, illetve ha $u_1 = y_1, \quad u_2 = y_2, \quad \ldots, \quad u_n = y_n$.

5. Térjünk rá most az általános esetre, amikor x_i-k és y_i-k közt egyenlők is lehetnek. Fent két helyen használtuk ki, hogy sem az x_i-k, sem az y_j-k között nem voltak egyenlők. Először akkor, amikor megállapítottuk, hogy az A_i és A_{i+1}, valamint a B_j és B_{j+1} pontokon át húzott egyenesek egy téglalapot határoznak meg. Másodszor, amikor megállapítottuk, hogy csak egyetlen olyan eset van, amikor minden $T_{p,q}$ téglalapot pontosan annyi kivágott téglalap fed le, amennyi egyáltalában lefedheti (illetve amennyinek feltétlenül le kell fednie). Az első esetben fellépő problémán könnyen lehet segíteni. Nevezetesen csak azon A_i és B_j pontok esetében készítjük el a $T_{i,j}$ téglalapokat, amikor ez lehetséges, azaz ha $x_i \neq x_{i+1}$ és $y_j \neq y_{j+1}$. Ezután a bizonyítás szó szerint úgy megy, mint a tárgyalt esetben, egészen addig, amíg a második probléma nem lép fel. Annak a bizonyítása, hogy $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$ nem lehet nagyobb, mint $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, illetve nem lehet kisebb, mint $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1$, ugyancsak nem okoz problémát. Hiszen a megfelelő helyen megállapítottuk, hogy a tárgyalt esetekben minden $T_{p,q}$ téglalap pontosan annyiszor van lefedve, ahányszor egyáltalában lefedhető (illetve amennyiszer feltétlenül le kell fedni).

Tegyük fel, hogy $y_i \neq y_{i+1}$ pontosan akkor teljesül, ha $x_i = x_{i+1}$ és legyen $x_j \neq x_{j+1} = x_{j+2} = \ldots = x_k \neq x_{k+1}$ Ha $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = M$, akkor a szereplő összegnek megfelelő kivágott téglalapok minden $T_{p,q}$-t pontosan annyiszor fednek le, amennyiszer az egyáltalában lehetséges. Vagyis $T_{j,j}$-t j darab és $T_{k,k}$-t k darab $(k > j)$. Így $T_{k,k}$-t $k-j$ olyan kivágott téglalap fedi le, mely $T_{j,j}$-t nem fedi. De ez a k darab téglalap nem fedheti le $T_{j,k+1}$-t és $T_{k+1,j}$-t sem, hiszen ezeket legfeljebb j darab kivágott téglalap fedheti le, márpedig a $T_{j,j}$-t lefedő j számú téglalap ezeket is lefedi. Így a szereplő $k-j$ számú téglalap megfelelő oldalainak hossza x_k, illetve y_k. Ezen $k-j$ számú téglalap rendre az $x_{j+1}u_{j+1}, \quad x_{j+2}u_{j+2}, \quad \ldots, \quad x_ku_k$ szorzatnak felel meg. Mivel az $u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_k$ számok mindegyike – mint láttuk – megegyezik y_k-val, ezért $u_{j+1} = y_{j+1}, \ldots, u_k = y_k$. Így, ha az x_i-k és $y_j - k$ között egyenlők is lehetnek, de $y_i = y_{i+1}$ pontosan $x_i = x_{i+1}$ esetén teljesül, akkor is érvényes, hogy $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = M$ csak akkor lehet, ha minden i esetén $u_i = y_i$. Ugyanígy belátható a hasonló állítás m-re nézve, ha az $y_i = y_{i+1}$ pontosan $x_{n-i} = x_{n-i+1}$ esetén teljesül.

Amennyiben csak azt kötjük ki, hogy $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$ és $y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n$ pozitív számok, az

$$m \leqq x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \leqq M$$

egyenlőtlenség ugyanúgy igazolható, mint itt történt. Egyenlőség azonban más esetekben is felléphet.

A fenti módon azt is meg lehet állapítani, hogy mikor lehet egyenlőség. Kimutatható, hogy egyenlőség csak akkor lehet (és akkor nyilván fenn is áll az egyenlőség), ha minden x_iu_i rendre megegyezik valamelyik x_jy_j-vel (illetve x_jy_{n-j+1} -gyel), mégpedig úgy, hogy más és más x_iu_i -hez más és más $x_jy_j \quad (x_jy_{n-j+1})$ található, amellyel megegyezik.