A P. 26. problémában[1] bizonyítva láttuk, hogy a $4\times k$ méretű sakktábla ($k=3$ és $k\geq 5$) egymás utáni lóugrásokkal, minden mezőre egyszer lépve csak úgy járható be, ha először az egyik olyan résztartományát járjuk be, amely a szélső sorok ($1\times k$ méretű téglalapok) valamelyik színű mezőiből és a középső sorok ellentétes színű mezőiből áll. A bizonyítás felhasználta, hogy az összes mezőket egyszer bejárva lóugrással, csak egy olyan lépés van, amelyik belső sorból belső sorba vezet, ezzel lép át a ló az egyik résztartományból a másikba.

Ezekre támaszkodva a bejárásokat csoportosítjuk résztartományváltó lépésük szerint, külön-külön megállapítjuk az egyes csoportokba tartozó bejárások számát, végül e számokat összegezzük. Ehhez

1. megállapítjuk a résztartományváltó EM lépéseket, ahol E az első résztartomány utoljára bejárt mezejét, M pedig a második résztartomány elsőnek bejárt mezejét jelöli.

2. minden egyes E-hez és M-hez mint kiindulóponthoz megállapítjuk saját résztartománya bejárási lehetőségeinek számát (vagyis most az első résztartományt visszafelé járjuk be), legyen ez egy bizonyos EM pár esetében e, ill. m.

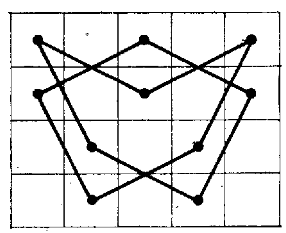
3. minden egyes, az E-hez vezető mondott bejárást visszafordítva összekapcsolunk minden egyes, az M-ből induló, mondott bejárással egy-egy teljes bejárásává a táblának, eszerint a mondott EM-hez em számú teljes bejárás tartozik.

1		2		3
4	17	5	18	6
14	7	15	8	16
	9		10	

1.ábra

A	B	C		
A_1	B_2	C_1	B_2	A_1
A_2	B_1	C_2	B_1	A_2
A	B	C		

2.ábra



3. ábra

Eljárásunkat megkönnyítik a tábla szimmetriái, valamint az, hogy a két résztartomány egymás tükörképe a tábla középső sorait elválasztó egyenesre. A szükséges mezőket az 1. ábra szerint számokkal jelöljük, 1–10 az elsőnek bejárandó résztartomány mezői, közülük 4–8 az E mezők, 14–18 pedig a második tartomány M mezői. Az így megállapítandó em összegnek a kétszerese lesz a keresett szám, hiszen nyilvánvalóan minden útvonal oda-vissza bejárható.

A 2. ábrán a középső sorok mezőit oszlopuk helyzete és a tábla függőleges szimmetriatengelyére tükrös voltuk alapján A, B, C betűkkel és a tartományt jelző indexszel is megjelöltük; nyilvánvalóan mindegyik A_i ($i=1$, 2) típusú mezőből indulva a maga résztartománya ugyanannyiféleképpen járható be, és ugyanez áll a B_i, valamint a C_i mezőkre; legyenek e számok (a fönti e és m konkrét értékei) a, b és c.

A tartományváltó lapos ugrások száma 6, közülük 2–2 A_1C_2, C_1A_2, ill. B_1B_2 típusú (pl. 4–15 és 6–15 az első típusúak), eszerint a tábla összes bejárásainak száma $N=2(2ac+2ca+2b^2)=8ac+4b^2$.

Megjegyezzük még, hogy a szélső (A-) oszlopok; mezőiről 2–2 mezejére léphet a ló az illető tartománynak, a B mezőkről 3-ra, a C mezőkről pedig 4-re. Ez a szélső oszlopok mezőin való áthaladás 2–2 lépését egyértelműen összekapcsolja:

$$-5-1-7-,\quad -2-4-9-,\quad -5-3-8-,\quad -2-6-10-,$$

kivéve ha az illető mező kezdő- vagy végpontja a tartomány bejárásának (tehát a négy egymás utáni hármasból legalább kettő minden bejárásban megtalálható valamelyik irányban). Ilyen blokká kapcsolódhat négy egymás utáni lépés is:

$$-7-1-5-3-8-,\quad \text{ill.}\quad -9-4-2-6-10-,$$

ti. ha 1 és 3, ill. ha 4 és 6 egyike sem végpont.

Mármost az A, B, C típusú E- (ill. M-) mezők konkrét mintapéldájának rendre a 4-es, 7-es, 5-ös mezőt véve, az első tartomány bejárásai – rendszeres próbálgatás eredményeként – az alábbiak; 2–2 szomszédos, közös kezdőszakasszal bíró bejárás zárójelbe foglalt részei egymásnak megfordításai.

[1]Lásd K. M. L. 39 (1969) 151. o.

$$\left.\begin{array}{lr}
\text{(I)} & 4-9-5-(1-7-10-6-2-8-3)\\
\text{(II)} & -(3-8-2-6-10-7-1)\\
\text{(III)} & 4-9-8-(2-6-10-7-1-5-3)\\
\text{(IV)} & -(3-5-1-7-10-6-2)\\
\text{(V)} & 4-9-8-3-5-(1-7-2-6-10)\\
\text{(VI)} & -(10-6-2-7-1)\\
\text{(VII)} & 4-2-6-10-7-1-5-(3-8-9)\\
\text{(VIII)} & -(9-8-3)
\end{array}\right\} a=8$$

$$\left.\begin{array}{lr}
\text{(IX)} & 7-1-5-(3-8-9-4-2-6-10)\\
\text{(X)} & -(10-6-2-4-9-8-3)\\
\text{(XI)} & 7-10-6-2-4-9-8-3-5-1
\end{array}\right\} b=3$$

$$\left.\begin{array}{lr}
\text{(XII)} & 5-(1-7-10-6-2-4-9-8-3)\\
\text{(XIII)} & -(3-8-9-4-2-6-10-7-1)
\end{array}\right\} c=2$$

Ezek szerint $a=8$, $b=3$ és $c=2$, tehát a táblának $N=164$ bejárása van.

Katona Endre (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (I)–(XIII) bejárásokat a következő észrevétel páronként egymásra, ill. önmagukra képezi le (és így bizonyos szempontból a teljesség ellenőrzésének is tekinthető). *Bármely bejárás alapján felírható egy újabb, az első tartomány minden mezeje helyére a vele egy oszlopban állót írva*, azaz a bejárásban az $1-4$, $7-9$, $2-5$, $8-10$, $3-6$ mezőpárokat fölcserélve (igazolását az olvasóra hagyjuk). Pl. (III)-ból:

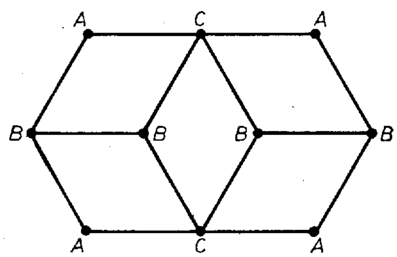
$$\text{(III}'\text{)} \qquad 1-7-10-5-3-8-9-4-2-6,$$

ennek a függőleges tengelyekre való tükörképe (vagyis $1-3$, $4-6$, $\ldots$ fölcserélése, 2 és 5 helyükön hagyása):

$$\text{(III}''\text{)} \qquad 3-8-9-5-1-7-10-6-2-4,$$

fordított sorrendben a (VIII)-at adja. – (XII) és (XIII) egymás tükörképei, mindkettőhöz a (IV) tartozik így hozzá.

2. A (IV), (IX), (XI)–(XIII) bejárások kezdő- és végpontja lóugrásnyira van egymástól, vagyis a féltábla bejárása záródik; mind az ötöt a 3. ábra szemlélteti, más-más lépés kiiktatásával.[2]



4. ábra

3. Feladatunk ekvivalens a 4. ábra gráfja szögpontjainak nyílt bejárásával, valamelyik szögpontból indulva és a gráf élei mentén haladva minden csúcsain át kell haladni egyszer.

Katona Endre

[2] Lásd: *Tusnády Gábor – Surányi János – Bakos Tibor*: A $4\times k$ méretű sakktábla bejárása, K. M. L. 40 (1970) 2–4. o.