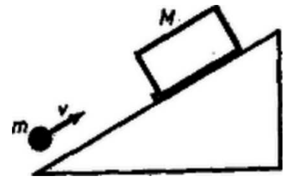
Az I. forduló feladatai:

I. *α hajlásszögű lejtőn M tömegű hasáb ütközőnek támaszkodva nyugalomban van. A hasábba a lejtő síkjával párhuzamosan, alulról felfelé m tömegű lövedéket lövünk v sebességgel. Mennyi idő alatt ér vissza a hasáb az ütközőig? A hasáb és a lejtő között a súrlódási együttható μ. A lövedék behatol a hasábba. A behatolási idő alatt a hasáb elmozdulása elhanyagolható. A nyugalmi és a mozgási súrlódási együtthatót egyenlőnek vehetjük.*



1. ábra

Megoldás: A lövedék benn marad a hasábban, tehát rugalmatlan ütközéssel van dolgunk (1. ábra). Az impulzustörvény értelmében a hasáb a benne levő golyóval együtt

$$c = \frac{mv}{m+M}$$

sebességgel indul el. A hasáb a benne levő lövedékkel együtt egyenletesen lassuló mozgással mozog, amelynek gyorsulása

$$a_t = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

A felfelé haladás ideje:

$$t_t = \frac{c}{a_t} = \frac{mv}{(m+M)g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

A felmenés útja:

$$s = \frac{c^2}{2a_t} = \frac{m^2v^2}{2(m+M)^2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

A legmagasabb helyzet elérése után a hasáb egyenletesen gyorsuló mozgással jön lefelé, melynek gyorsulása:

$$a_t = g(\sin a - \mu\cos\alpha).$$

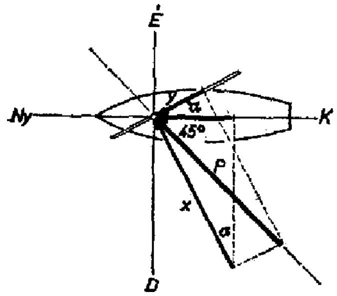
A lecsúszás ideje $s = at^2/2$ alapján:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = \sqrt{\frac{m^2v^2}{(m+M)^2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} =$$
$$= \frac{mv}{(m+M)g}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}.$$

A hasáb visszaérkezéséig eltelő összes idő: $t = t_t + t_1$.

Ha a lejtő szöge kisebb a súrlódási határszögnél, akkor a hasáb egy darabot csúszik felfelé, de ott ragad, nem indul el visszafelé.

2. *Milyen irányban kell egy vitorláshajó vitorláját beállítani ahhoz, hogy délkeletről fújó szél esetében, a horgony felhúzása után a hajó nyugati irányban maximális gyorsulással induljon el? A vitorláshajó testének méretei a vitorla felületének nagyságához képest elhanyagolhatók. A hajótest menetirányú közegellenállása kicsiny, keresztirányban viszont gyakorlatilag végtelennek tekinthető.*



2. ábra

Megoldás: A szél által kifejtett erőt a 45°-ban felfelé irányuló P vektornyíl jelzi (2. ábra). Ennek az erőnek a vitorlára merőleges x összetevője:

$$x = P\sin(45° + \alpha).$$

P erő vitorla irányába eső összetevőjét hatástalannak tekintjük. A hajótest csak hossztengelye irányában képes elmozdulni, ezért a hajó hossztengelyét nyugati irányban kell beállítani, és ki kell számítanunk x erő nyugati irányba eső y összetevőjét:

$$y = x\sin\alpha = P\sin\alpha \cdot \sin(45° + \alpha).$$

Feladatunk annak megállapítása, hogy y az α szög mely értéke mellett a legnagyobb. Alkalmazzuk ezt a helyettesítést:

$$\alpha = \beta - 22{,}5°.$$

Ezt felhasználva:

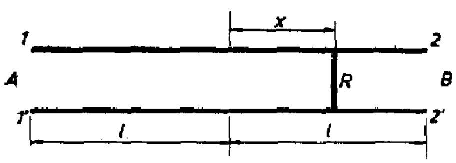
$$y = P\sin(\beta - 22{,}5°)\cdot\sin(\beta + 22{,}5°) =$$
$$= P(\sin^2\beta - \sin^2 22{,}5°).$$

A zárójeles összeg második tagja állandó, tehát y akkor a legnagyobb, ha $\beta = 90°$; ebből következően:

$$\alpha = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°.$$

Tehát a vitorlának feleznie kell a menetirány és a szél szögét.

3. *Földalatti kéterű kábelben az A és B helyek között valahol átvezetés van. A kábel A és B helyeken hozzáférhető. Az átvezetés helyének felderítése céljából a kábel két erét először a B helyen kötik össze, és megmérik A helyen az ellenállást (R_1). Majd a mérést megismétlik úgy, hogy az A helyen az 1–1′ pontokat kötik össze, és B helyen 2–2′ pontok között mérik meg az ellenállást (R_2). Az A és B helyek egymástól való távolsága (L) ismert. A kábel egységnyi hosszának az ellenállása* r ohm/méter. *Határozzuk meg az átvezetés helyét! Számszerű adatok:* $R_1 = 3{,}75$ ohm, $R_2 = 2{,}5$ ohm, $L = 200$ méter, $r = 0{,}01$ ohm/méter.



3. ábra

Megoldás: Az a körülmény, hogy R_1 és R_2 összege nem egyenlő a kábel eredeti ellenállásával, szintén arra figyelmeztet, hogy az átvezetés nem teljes rövidzárlat, hanem R ohm ellenállása van (3. ábra). Az egyes kábelek fél hosszúságát l-lel jelöljük, és az átvezetés középtől számított x távolságát tekintjük ismeretlennek.

Az első mérés alkalmával R párhuzamosan van kapcsolva két $l - x$ hosszúságú vezetékkel, és ez a rendszer sorba van kapcsolva két $l + x$ hosszúságú vezetékkel ezért:

$$R_1 = 2(l + x)r + \frac{2(l - x)rR}{2(l - x)r + R}.$$

A második mérés alkalmával R párhuzamosan van kapcsolva két $l + x$ hosszúságú vezetékkel, és ez a rendszer sorba van kapcsolva két $l - x$ hosszúságú vezetékkel, ezért:

$$R_2 = 2(l - x)r + \frac{2(l + x)rR}{2(l + x)r + R}.$$

Két egyenletünk egyenletrendszert alkot x-re és R-re. R-t kiküszöbölve és rendezve:

$$r(R_1 - R_2)\cdot x^2 + \big[R_1R_2 - 2lr(R_1 + R_2)\big]\cdot x + l^2r(R_1 - R_2) = 0.$$

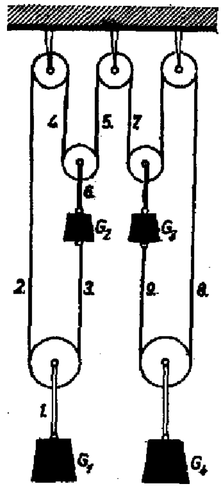
Ennek megoldása (számunkra a második gyöknek van értelme):

$$x = \frac{2lr(R_1 + R_2) - R_1R_2 - \sqrt{R_1^2R_2^2 - 4lrR_1R_2(R_1 + R_2 - 4lr)}}{2r(R_1 - R_2)}.$$

A mi számadatainkkal $x = 50$ méter, tehát az átvezetés a kábel balról számított háromnegyedében van. Az átvezetés ellenállására a behelyettesítés ezt adja: $R = 3$ ohm.

A II. forduló feladatai:

1. *A ábrán látható G_1, G_2, G_3 és G_4 súlyú testből, három álló- és négy mozgócsigából álló rendszer $G_1 = 10$* kp *esetén egyensúlyban van. Milyen irányú és mekkora lesz az egyes testek gyorsulása, ha a G_4 súlyú testet kétszer akkora súlyú ($2G_4$), a G_2 súlyú testet négyszer akkora súlyú ($4G_2$) testtel cseréljük ki? (A csigák tömegei elhanyagolhatók, a kötél súlytalannak és nyújthatatlannak tekinthető.)*



4. ábra

Megoldás: Először az egyensúly feltételét keressük. Ha $G_1 = 10$ kp, akkor az 1. helyen működő 10 kp 2.-nél és 3.-nál 5 kp erővel húz lefelé. A fonalat feszítő erő mindenütt ugyanakkora, tehát 4.-nél és 5.-nél is 5–5 kp erő húz felfelé. A 4. és 5.-nél működő erők eredője 6.-nál 10 kp, tehát egyensúly csak úgy lehet, ha 6.-nál 10 kp húz lefelé. De 3.-nál 5 kp húz lefelé, ezért egyensúly csak úgy lehet, ha a hiányzó 5 kp-ot G_2 biztosítja, tehát $G_2 = 5$ kp. Ugyanígy folytatva kimutatható, hogy a szimmetrikus berendezésünkben $G_3 = 5$ kp és $G_4 = 10$ kp.

Most a feladat elrontja az egyensúlyi helyzetet azzal, hogy a következő súlyok felfüggesztését rendeli el:

$$G_1 = 10 \text{ kp}, \quad G_2 = 20 \text{ kp}, \quad G_3 = 5 \text{ kp}, \quad \text{és} \quad G_4 = 20 \text{ kp}.$$

Az egyensúly feltétlenül megbomlik, és az állandó erőkülönbségek hatására az egyes tömegek a_1, a_2, a_3, a_4 gyorsulásokkal egyenletesen gyorsuló mozgásokat végeznek. A gyorsulást pozitívnak számítjuk, ha lefelé mutat.

Ha egy fonálon lógó tömeg a gyorsulással mozog lefelé, akkor a fonalat nem mg, hanem mg–ma erővel feszíti. Ha különböző csigákon átvetett fonálon lógó tömegek gyorsuló mozgásokat végeznek, akkor is mindenütt a fonál mentén egyenlő a fonálerő, (az mg–ma képlettel számítva). Tehát felírjuk, hogy mekkora a P fonálerő a 2., 4., 7. és 8. helyeken:

$$P = \frac{m_1 g - m_1 a_1}{2}, \qquad P = \frac{P + m_2 g - m_2 a_2}{2}, \qquad P = \frac{P + m_3 g - m_3 a_3}{2},$$
$$P = \frac{m_4 g - m_4 a_4}{2}.$$

A 2. és 8. helyeknél 2-vel azért kellett osztani, mert az erő két kötél között oszlik meg. 4. és 7.-nél ezenkívül még figyelembe kellett venni, hogy 3.-nál és 9.-nél P fonálerő is húzza lefelé a G_2, illetve G_3 súlyokat. Négy egyenletünkből kifejezzük a négy gyorsulást:

$$a_1 = \frac{m_1 g - 2P}{m_1} = g\left(1 - \frac{2P}{G_1}\right),$$
$$a_3 = \frac{m_2 g - P}{m_2} = g\left(1 - \frac{P}{G_2}\right).$$
$$a_3 = \frac{m_3 g - P}{m_3} = g\left(1 - \frac{P}{|G_3}\right),$$
$$a_4 = \frac{m_4 g - 2P}{m_4} = g\left(1 - \frac{2P}{G_4}\right).$$

A négy gyorsulás a fonálerővel együtt öt ismeretlent jelent, tehát szükség van még egy egyenletre. Az ötödik egyenlet abból a kényszer–körülményből adódik, hogy a fonál teljes hosszúsága adott, tehát az egyes csigák mozgása nem független egymástól. Például G_2 tömeg t idő alatt $a_2 t^2/2 = s_2$ utat tesz meg lefelé. Ha G_3 és G_4 közben mozdulatlanok maradnak, akkor G_2 ezalatt a fölötte levő fonalakból $2s_2$-t húz le, tehát a 3. pontban $2s_2$-vel megy a fonál felfelé. De 3.-nál s_2-vel ment le, így G_1 csigája számára $2s_2 - s_2 = s_2$ fonáltöbblet keletkezik, amelynek két fonálon kell megoszolnia, és G_1 útja (felfelé) $s_1 = s_2/2$. Ugyanezt a gondolatmenetet tovább folytatva kapjuk, hogy az egyes súlyok útjait összekapcsolja a következő algebrai összeg:

$$s_1 + \frac{s_2}{2} + \frac{s_3}{2} + s_4 = 0.$$

t^2-tel egyszerűsítve és bővítve:

$$2a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 0.$$

Ez az egyenlet adja meg az egyes gyorsulások kapcsolatát annak következtében, hogy a fonál adott hosszúságú. A négy gyorsulás helyébe behelyettesítve a gyorsulások előbbi értékeit, egyenletet kapunk P fonálerőre, amelynek megoldása:

$$P = \frac{6}{\frac{4}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \frac{4}{G_4}}.$$

A mi számadataink mellett $P = \frac{120}{17}\,\mathrm{kp} = 7\frac{1}{17}\,\mathrm{kp} = 7{,}059$ kp. P értékét felhasználva megkapjuk a négy gyorsulást:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{7}{17} \cdot g = -402\ \mathrm{cm/sec}^2,\\
a_2 &= +\frac{11}{17} \cdot g = +627\ \mathrm{cm/sec}^2,\\
a_3 &= -\frac{7}{17} \cdot g = -402\ \mathrm{cm/sec}^2,\\
a_4 &= +\frac{5}{17} \cdot g = +284\ \mathrm{cm/sec}^2.
\end{aligned}$$

2. *Egy m tömegű, v sebességű golyó M tömegű álló golyónak ütközik. Az ütközés centrális, de nem tökéletesen rugalmas. Határozzuk meg az ütközés során elvesző mechanikai energiát mint az ütközés előtti és utáni sebességek – valamint az adott tömegek – függvényét. A kapott eredmény alapján definiáljunk olyan mennyiséget, mely az ütközés rugalmatlanságának fokára jellemző.*

Megoldás: Az 1954. évi verseny II. fordulójának 4. feladatában szerepelt a részben rugalmatlan ütközés (Fizikai versenyfeladatok II. 9. oldal). Ha v_1 és v_2 sebességű m_1 és m_2 tömegek centrálisan ütköznek, akkor először egy közös u sebességet vesznek fel, amely az impulzustörvény értelmében

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Ha az ütközés teljesen rugalmatlan, akkor a tömegek együtt maradnak, és ezzel a közös (súlyponti) sebességgel repülnek tovább. Ha az ütközés nem teljesen rugalmatlan, akkor a tömegek újra szétválnak, és újra elvesztik, illetve megszerzik az előbbi sebességváltozás bizonyos α törtrészét:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u - \alpha(v_1 - u),\\
u_2 &= u + \alpha(u - v_2).
\end{aligned}$$

Az idézett helyen megtalálható annak bizonyítása, hogy mindkét testre vonatkozóan α ugyanakkora. Az ütközés előtti és utáni mozgási energiák különbsége, vagyis a hővé alakult energia:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2^2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 u_1^2}{2} - \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Felhasználva előbbi képleteinket, az energiaveszteség:

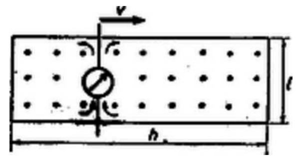
$$\Delta E = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 \cdot (1 - \alpha^2)}{2(m_1 + m_2)}.$$

A rugalmatlanság mértékéül α is felhasználható; értéke 0 és 1 között van, teljesen rugalmatlan ütközésnél $\alpha = 0$, teljesen rugalmasnál $\alpha = 1$. Az energiaveszteség teljesen rugalmatlan ütközésnél a legnagyobb (képletünk $\alpha = 0$-hoz tartozó értéke). Jellemzésül használhatjuk a ténylegesen elvesztett és maximálisan elveszthető energiák hányadosát:

$$\frac{\text{elveszett energia}}{\text{max. elveszthető energia}} = \frac{1 - \alpha^2}{1} = 1 - \alpha^2 = k.$$

Ez a k mennyiség is használható a rugalmatlanság jellemzésére; értéke teljesen rugalmatlan ütközésnél $k = 1$, teljesen rugalmasnál $k = 0$.

3. *Téglalap alakú vezetőkeret síkjára merőleges homogén mágneses térben van. A keret két párhuzamos oldalán átfektetett l hosszúságú vezetődarabot egyenletes (v) sebességgel ide–oda mozgatjuk, miközben a vezeték l-lel párhuzamos marad. v sebesség iránya párhuzamos h-val. A mozgatott vezetődarabba R belső ellenállású árammérőt iktatunk. A többi vezeték ellenállása R-hez képest elhanyagolható.Mit mutat a műszer? Taglaljuk a jelenséget!*



5. ábra

Megoldás: A mozgatott vezetődarabban indukálódó feszültség (5. ábra) a mozgatott vezetődarabhoz kétoldalt csatlakozó keretrészekben áramot okoz, amelyek keringési iránya ellentétes. Az áramerősséget a műszer R ellenállása szabja meg, mert a többi vezeték ellenállása elhanyagolható. Ez az egész átfolyik a műszeren, azután szétágazik a keret két részébe, de hogy milyen arányban oszlik meg, azt nem tudjuk megmondani, ha a keretrészek mindegyikének ellenállása ismeretlenül kicsiny. v irányváltásakor a feszültség és mindegyik áram irányt változtat.