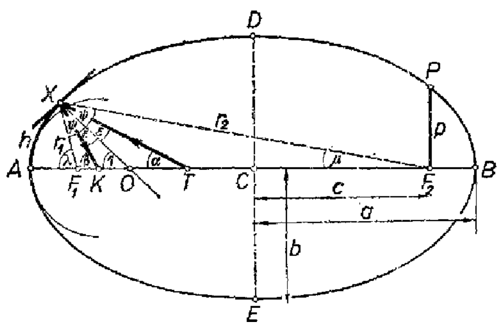
Néhány olyan kérdésről lesz szó, amely a görbületi kör és a görbületi sugár szerepét mutatja be, egyszersmind megismerkedünk ezekkel a fogalmakkal. Kiindulásul választjuk a homorú tükör képalkotását. Ismeretes, hogy az r rádiuszú homorú gömbtükör t távolságban levő tárgyakról k távolságban ad képet és a tengely közelében haladó sugarak esetében jó közelítésben érvényes ez a törvény:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f}. \tag{1}$$

$f=r/2$ neve fókusztávolság. A tengellyel párhuzamosan beeső sugarak a fókuszpontban találkoznak visszaverődés után, a fókuszpont tükörtől mért távolsága a fókusztávolság. t és k is a tükörtől számítandók.

Most az ellipszoid tükör viselkedését fogjuk tanulmányozni. Homorú tükrünk egy forgási ellipszoid, ennek metszetét tünteti fel az 1. ábra. Ellipszisünk fókuszai F_1 és F_2, fél nagytengelye $AC=CB=a$, fél kistengelye $DC=CE=b$, excentritása $F_1C=CF_2=c$. Ismeretes, hogy $a^2=b^2+c^2$. Az X ponthoz tartozó vezérsugarak $r_1=F_1X$, $r_2=F_2X$. Az ellipszis definíciója szerint bármely pontban $r_1+r_2=2a$.



1. ábra

Ellipszis alakú tükrünk A csúcspont körüli részét használjuk, és az ellipszis nagytengelyén helyezzük el T-ben a fényforrást. A belőle kiinduló egyik fénysugár α szöget zár be a tengellyel és X-ben éri el a tükröt. A beesési merőleges szerepét most r_1 és r_2 vezérsugarak szögfelezője (XO) tölti be mint a tükör érintkezőjének merőlegese, és ez az egyenes mindegyik vezérsugárral ψ szöget alkot. Az ε beesési szöggel érkező fénysugár ugyanakkora szöggel verődik vissza, majd K-ban metszi a tengelyt, β szögben. A vezérsugarak szögfelezője γ szögben metszi a tengelyt.

$$\text{Az } OTX_4\text{-ből}: \ \varepsilon+\alpha=\gamma,$$
$$\text{a } KOX_4\text{-ből}: \ \beta=\gamma+\varepsilon,$$

összegezve: $\quad \alpha+\beta=2\gamma.$
Tehát γ szög α és β számtani középértéke. Az OF_2X_4 és F_1OX_4 elhelyezkedéséből látszik, hogy γ a vezérsugarak λ és μ szögének is számtani középértéke:

$$2\gamma=\lambda+\mu,$$

ezért: $\quad \alpha+\beta=\lambda+\mu.$
Ez minden közelítés nélkül pontosan igaz.

Ezután a szögek helyett távolságokat hozunk be, de ekkor olyan közelítéseket kell használnunk, amelyek csak a tengely közelében haladó fénysugarak esetében engedhetők meg. Először is a szögek helyébe a tangenseiket írjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\lambda+\operatorname{tg}\mu,$$

azután beírjuk ezek közelítő értékeit az 1. ábra alapján:

$$\frac{h}{AT}+\frac{h}{AK}=\frac{h}{AF_1}+\frac{h}{AF_2}.$$

h kiegyszerűsíthető, ami azt jelenti, hogy képalkotás van, vagyis minden T-ből kiinduló fénysugár ugyanazon K pontban találkozik (a közelítéseket figyelembe véve). Az $AT=t$ távolságot tárgytávolságnak, az $AK=k$ távolságot képtávolságnak nevezzük. Továbbá $AF_1=a-c$, $AF_2=a+c$, tehát

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a+c}=\frac{a+c+a-c}{a^2-c^2}=\frac{2a}{b^2}.$$

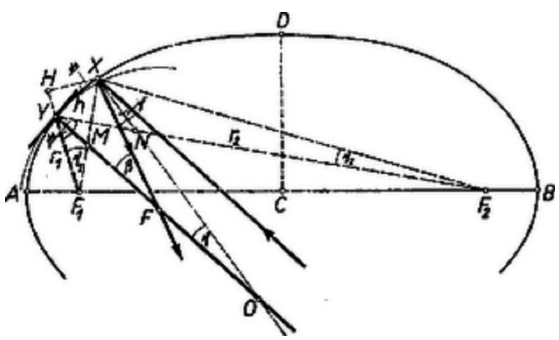
Tehát a tárgytávolság és képtávolság reciprok értékeinek összege állandó. Ebben az állandóban

$$\varrho=\frac{b^2}{a} \tag{2}$$

ugyanazt a szerepet tölti be, mint a gömbtükör (1) alatti törvényében a gömb r rádiusza. Ha ezzel a ϱ rádiusszal készítünk el egy gömbtükröt, és ellipszis tükrünk helyére tesszük, akkor a képalkotásban semmi különbséget sem találunk. ϱ-tól eltérő rádiuszú gömbök esetében T tárgy képe K-nál közelebb vagy távolabb keletkezne. Valamennyi létező kör közül ez a ϱ rádiuszú kör simul legjobban az ellipszishez az A csúcspontban, és képalkotás szempontjából az ellipszistükör ϱ rádiuszú gömbtükörrel pótolható. A (2) szerinti ϱ rádiusz neve az A ponthoz tartozó görbületi sugár, és a vele rajzolt kör (az 1. ábrán szaggatott vonal) a görbületi kör.

Az ellipszis függvényéből következik, hogy ϱ egyenlő a fókuszpontban emelt $p = F_2P$ ordinátával, az ellipszis úgynevezett paraméterével. Hasonló számítást végezhettünk volna el a hiperbolára vonatkozóan is. Számításunk tartalmazza a gömbtükör távolság törvényének levezetését is, mert kör esetében $a = b = r$ és $\varrho = r$.

Eddigi gondolatmenetünk az ellipszis csúcspontjára vonatkozott, de meg kell vizsgálnunk az ellipszis egyéb pontjait is, vagyis meg kell keresnünk a görbületi sugár nagyságát az ellipszis tetszés szerinti pontjához tartozóan. Kissé hosszabb számítás vár ránk, de az eredmény érdekes lesz. 2. ábránk ellipszis alakú tükrének Y pontját vizsgáljuk és optikai tengelyünk az Y-ban rajzolt érintő merőlegese, az F_1YF_2 szög szögfelezője. Az YO optikai tengely mindegyik vezérsugárral ψ szöget alkot. A tengellyel párhuzamosan érkező fénysugár X-ben verődik vissza a tükörről, miközben XO szögfelező a beesési merőleges, amelynek két oldalán találjuk γ beesési és visszaverődési szögeket. Ugyanez a γ adja meg az XO szögfelezőnek a tengellyel alkotott $XOY\sphericalangle = \gamma$ szögét is. Azonnal látszik, hogy $\beta = 2\gamma$



2. ábra

Az ellipszis YX íve F_1 fókuszból γ_1, F_2 fókuszból γ_2 szög alatt látszik. Az F_1MY és OMX háromszögekből, mert M-nél csúcsszög van:

$$\gamma_1 + \psi = \gamma + F_1XO\sphericalangle,$$

hasonlóan az F_2NX és ONY háromszögekből, az N-nél levő csúcsszög folytán:

$$\gamma_2 + F_2XO\sphericalangle = \gamma + \psi.$$

Az egyenleteket összeadva, és mivel XO az F_1XF_2 szög felezője:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma.$$

Érdekes, hogy γ_1 és γ_2 szögek számtani középértéke γ. Ez minden közelítés nélkül igaz. Ezzel β-ra vonatkozó összefüggésünk:

$$\beta = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Most vesszük figyelembe, hogy $YX = h$ ív igen kicsiny és ennek értelmében közelítünk. HX merőleges r_1-re, ezért $HX = h\cos\psi$. Radiánban kifejezve $\gamma_1 = HX/r_1 = h\cos\psi/r_1$. Ugyanígy $\gamma_2 = h\cos\psi/r_2$. Radiánban kifejezve $\beta = h/YF$. Ezeket felhasználva:

$$\frac{h}{YF} = \frac{h\cos\psi}{r_1} + \frac{h\cos\psi}{r_2}.$$

h kiesése azt bizonyítja, hogy a közelítések érvényessége mellett a párhuzamosan beeső sugarak F fókuszban találkoznak. A fókusztávolság:

YF=f=r$_1 r_2 \frac{}{(r_1+r_2)\cos\psi=\frac{r_1 r_2}{2a\cos\psi}.}$

Még egy lépés szükséges a vezérsugarak kifejezésére. Felírjuk F_1YF_2 háromszögre a cosinus tételt:

$$\begin{aligned}(2c)^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 2\psi = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(2\cos^2\psi - 1) = \\ &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - 4r_1r_2\cos^2\psi = \\ &= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2\psi = (2a)^2 - 4r_1r_2\cos\psi,\end{aligned}$$

innen a vezérsugarak szorzata:

$$r_1r_2 = \frac{a^2 - c^2}{\cos^2\psi} = \frac{b^2}{\cos^2\psi}.$$

Ezt felhasználva a fókusztávolság $b^2/2a\cos^3\psi$, és a fókusztávolság kétszerese, a görbületi sugár:

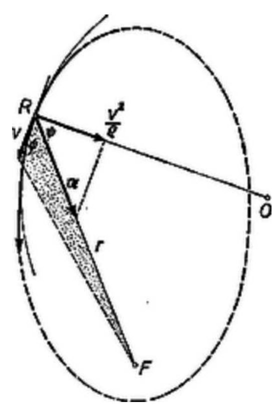
$$\varrho = \frac{b^2}{a\cos^3\psi}. \tag{3}$$

Ez az igen érdekes képlet adja meg általánosságban a görbületi sugarat az ellipszis tetszés szerinti pontjában. Az ekkora rádiuszú kör (a 2. ábrán a szaggatott vonal) simul legjobban az ellipszishez, ilyen rádiuszú gömbtükörrel helyettesíthetjük az ellipszis tükröt. Érdekes, hogy az ellipszis keresztülhalad a görbületi körön, mert Y-tól A felé görbültebb, Y-tól D felé kevésbé görbült, mint a görbületi kör.

(3) képletünkben ψ, a vezérsugarak szögének fele a független változó. Az ellipszis A csúcsában $\psi = 0$, $\cos\psi = 1$ és $\varrho = b^2/a$, megegyezésben (2)-vel, ekkor ϱ-nak minimuma van, itt az ellipszis a leggörbültebb. Az ellipszis D csúcsában $\cos\psi = b/a$, és $\varrho = a^2/b$; most ϱ-nak maximuma van, itt az ellipszis a legkevésbé görbült. Különben ϱ felírható a paraméterrel is: $\varrho = p/\cos^3\psi$.

Nemcsak a fénytanban, hanem a mechanikában is nagy szerepe van a görbületi körnek. Ismeretes, hogy m tömegű test r rádiuszú körpályán ω szögsebességgel, v tényleges sebességgel végbemenő körmozgásához $P = m\omega^2 r = mv^2/r$ centripetális erő szükséges. De mi van nem körön végbemenő görbevonalú mozgás esetében? A bolygómozgás példáján adunk erre választ.

Bolygónk ebben a pillanatban az F-ben álló igen nagy M tömegű Naptól $RF = r$ távolságban halad v sebességgel; a sebesség merőlegese ψ szöget alkot r összekötő egyenessel (3. ábra). Ha a bolygó m tömege elhanyagolható a Nap tömege mellett, akkor a Nap nyugalomban levőnek tekinthető. Newton felfedezése szerint a bolygó és a Nap között fmM/r^2 nagyságú kölcsönös vonzóerő működik az összekötő egyenes mentén (f a gravitációs állandó). Ennek hatására a bolygó valamilyen görbe pályán mozog, még nem tudjuk, milyenen.



3. ábra

Először használjuk fel a tömegvonzási erő azon tulajdonságát, hogy centrális erő, vagyis a tömegek összekötő egyenesében hat. Ebből következik függetlenül az erőtörvény és a pálya alakjától, hogy a területi sebesség állandó. A vezérsugár által 1 másodperc alatt leírt terület:

$$\frac{vr\cos\psi}{2} = K. \tag{4}$$

Ez a mennyiség állandó egy magára hagyott bolygó esetében. A törvény bizonyítása megtalálható a Középiskolai Matematikai Lapok XIX. Kötet, 1959. nov.-i számában a 154. oldalon. Az összekötő egyenes mentén működő erő következménye az is, hogy a pálya v-n és F-en átmenő síkban fekszik.

Csak most használjuk fel az erőtörvény négyzetes sajátosságát. A bolygó $a = fM/r^2$ teljes gyorsulása F felé irányul, és van az érintőre merőleges összetevője:

$$a\cos\psi = \frac{fM\cos\psi}{r^2}.$$

A gyorsulás ezen összetevőjét kell egyenlővé tenni a centripetális gyorsulással. Ennek kiszámítását úgy végezzük, hogy az ismeretlen alakú görbe pályát R pontban $RO = \varrho$ sugarú görbületi körével helyettesítjük, tehát a centripetális gyorsulás v^2/ϱ. Egyenlővé téve a teljes gyorsulás merőleges összetevőjével:

$$\frac{fM\cos\psi}{r^2} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Innen a görbületi sugár: $\varrho = \dfrac{v^2r^2}{fM\cos\psi}.$

Ide behelyettesítjük (4) alapján vr értékét:

$$\varrho = \frac{\dfrac{4K^2}{fM}}{\cos^3\psi}. \tag{5}$$

A számláló állandó és a nevezőben az irányt meghatározó szög cosinusának köbe szerepel! Óriási eredmény: ez az ellipszis görbületi sugara. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a tömegvonzási törvény alapján létrejövő bolygópályák ellipszisek (kúpszeletek), amelyek egyik fókuszában a Nap áll.

Számításunk eredménye Kepler I. törvénye. Kepler II. törvényét a területi sebesség tétele tartalmazta. Hátra van még Kepler III. törvényének bizonyítása. (5) alatti eredményünkben $4K^2/fM = p = b^2/a$ az ellipszis paramétere. Ebből a területi sebesség:

$$K = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{fM}{a}}.$$

Minthogy az ellipszis területe πab, ha a bolygó keringési ideje T, akkor a területi sebesség: $K = \dfrac{\pi ab}{T}$.

Egyenlővé téve:

$$\frac{b}{2}\sqrt{\frac{fM}{a}} = \frac{\pi ab}{T},$$

innen a keringési idő négyzete:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{fM} \cdot a^3.$$

Ez Kepler III. törvénye, amely szerint a keringési idő négyzete arányos a fél nagytengely köbével. Igen nevezetes, hogy a kistengely hossza nem szerepel, ettől független a keringési idő. A bolygómozgás egyéb kérdéseire is választ kaphatunk képleteinkből.

Vermes Miklós