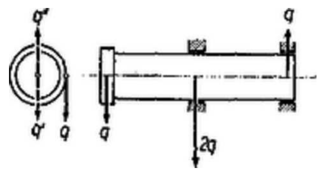
Az 1963. évi Eötvös Loránd fizikai verseny

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 19-én rendezte ez évi Eötvös Loránd fizikai versenyét Budapesten és 6 vidéki városban az idén érettségizettek számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. 2 *méter hosszú,* 8 *centiméter átmérőjű vízszintes rúd közepén és egyik végén csapágyazva van. A csapágyak csúszó súrlódási együtthatója* 0,05. *A rúd másik végén* 10 *centiméter átmérőjű tárcsa van, amelynek kerületéről fonál lóg le. Mekkora súly akasztható e fonál végére, hogy a rúd (a súrlódás folytán) még ne jöjjön forgásba? A rúd és tárcsa önsúlya elhanyagolandó.*



1. ábra

Megoldás. A fonálra akasztott q súly a tárcsa kerületéről lecsüngő fonálon lóg (1. ábra). A tárcsa középpontjában hozzáveszünk függőlegesen felfelé irányuló, ugyanakkora q' és q'' erőket. Közülük q' a rúd tárcsás végét le akarja hajlítani. Ezt a q' erőt a csapágyakban függőlegesen lefelé ható $2q$ és függőlegesen felfelé ható q erők ellensúlyozzák. q és q'' erőkből álló erőpár $5q$ forgatónyomatékkal forgatja a rudat. μ súrlódási együttható esetében $2\mu q$ és μq a lehetséges legnagyobb súrlódási erők, tehát az a legnagyobb forgatónyomaték, amely a súrlódási erő által létre jöhet:

$$2\mu q \cdot 4 + \mu q \cdot 4 = 12\mu q.$$

A súrlódási erő szempontjából nem lényeges, hogy a $2q$ és q erők felfelé vagy lefelé hatnak-e, mindenképp ugyanaz a súrlódási erő szerepel, ha az erő merőlegesen szorítja egymáshoz a csúszó felületeket.

A szerkezet nyugalomban maradásának az a feltétele, hogy a lehetséges legnagyobb súrlódási forgatónyomaték egyenlő vagy nagyobb legyen, mint a fonálra akasztott súly forgatónyomatéka:

$$5q \leq 12\ \mu q, \quad \text{adatainkkal:} \quad 5q \leq 0{,}6q.$$

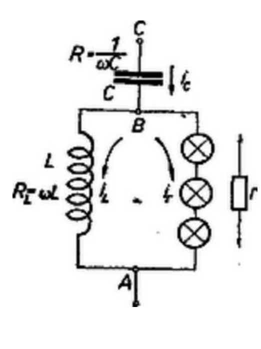
Látható, hogy ez a feltétel csak $q = 0$ esetében teljesülhet, ami azt jelenti, hogy a szerkezet már a fonálra akasztott legkisebb terhelés mellett is forgásba jönne. Érthető az ok: q növelése ugyanolyan mértékben növeli a rudat forgató forgatónyomatékot, mint a súrlódási erők forgatónyomatékát.

Egyensúlyfeltételünkből látható, hogy $\mu = 5/12 = 0{,}416$ vagy ennél nagyobb súrlódási együttható esetében a rúd nem jönne forgásba bármilyen nagy ráakasztott teher esetében sem. Ugyanígy elérhető a nyugalom feltétele a rádiuszok megfelelő változtatásával is.

Más a helyzet, ha figyelembe vesszük a rúd önsúlyát (Q). Ha az egész szerkezet súlypontja nincs a csapágyakon kívül, akkor az önsúly folytán létrejövő súrlódási erő μQ, és ennek forgatónyomatéka $4\mu Q$. Ezt hozzáadjuk egyensúly-feltételünk jobb oldalához (0,05 értékű súrlódási együtthatóval): $5q \leq 0{,}6q + 0{,}2Q$. Most nem egyszerűsíthetünk q-val és megállapíthatjuk az egyensúly feltételét. Feladataink számadatai mellett az egyensúly feltétele: $q \leq Q/22$.

2. *Hogyan méretezendő a rajz szerinti kapcsolásban a kondenzátor és az önindukciós tekercs, hogy adott rezgésszámú és nagyságú váltófeszültség mellett az izzólámpák ugyanakkora áramerősséggel égjenek, tekintet nélkül arra, hogy hány darab egyforma izzólámpát használnak?*

Megoldás. Ha a berendezés A és C pontjára szinuszos váltófeszültséget kapcsolunk, akkor bármely két pont között fellépő váltófeszültség és bármely alkatrészben folyó áramerősség ugyanolyan rezgésszámú színuszfüggvény szerint változik, de az amplitúdók és fázisok a legkülönbözőbbek lehetnek (2. ábra). Feltételezzük, hogy az együttesen r ellenállású izzólámpa-sorozatban $i_r = i_{r0} \sin \omega t$ váltóáram van, és ebből állapítjuk meg, miféle váltófeszültségnek kell A és C között lennie. ω körfrekvencia mindvégig adott, t az idő.



2. ábra

Ohm törvénye szerint az ohmos ellenálláson, vagyis A és B között jelen levő váltófeszültség $U_{AB} = ri_{r0}\sin\omega t$. Ugyanez a váltófeszültség van az L önindukciójú, $R_L = \omega L$ induktív ellenállású tekercs végein is. A tekercs árama 90°-kal késik a feszültséghez képest:

$$i_L = \frac{r}{RL} \cdot i_{r0}\sin(\omega t - 90°).$$

Összegeznünk kell a párhuzamosan kapcsolt ohmos ellenállás és a tekercs áramerősségét. Mindegyik ugyanolyan hullámhosszú szinuszfüggvény, de eltérő amplitúdóval és fázissal.

Két eltérő amplitúdójú és fázisú sinus összegezésének általános eljárása a következő:

$$A\sin\omega t + B\sin(\omega t + \beta) = A\sin\omega t + B\cos\beta\sin\omega t +$$
$$+ B\sin\beta\cos\omega t = (A + B\cos\beta)\sin\omega t + B\sin\beta\cos\omega t =$$
$$= E\left[\frac{A + B\cos\beta}{E}\cdot\sin\omega t + \frac{B\sin\beta}{E}\cdot\cos\omega t\right],$$

ahol

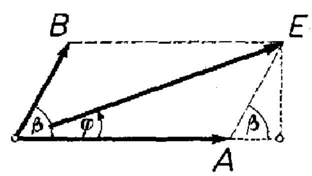
$$E = \sqrt{(A + B\cos\beta)^2 + (B\sin\beta)^2}.$$

Ez az azonos átalakítás lehetővé teszi, hogy a $\sin\omega t$ és $\cos\omega t$ előtt álló szorzókat ugyanazon szög cos-ának és sin-ának tekintsük, mert e mennyiségek négyzetösszege 1. Ugyanezen φ szög tangense:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B\sin\beta}{A + B\cos\beta}.$$

Tehát két színuszhullámunk összege:

$$E[\cos\varphi\sin\omega t + \sin\varphi\cos\omega t] = E\sin(\omega t + \varphi).$$



3. ábra

3. ábránk mutatja, hogy E olyan paralelogrammának átlója, melynek oldalai A és B, az oldalak szöge β, és E-nek A-val alkotott szöge φ. Számításunk ezen geometriai értelmezése teszi lehetővé színuszhullámok grafikus összegezését az ún. vektordiagramokkal.

Összegezzük az ohmos ellenálláson és a tekercsen átfolyó áramokat:

$$i_r + i_L = i_{r0}\sin\omega t + \frac{r}{R_L}\cdot i_{r0}\sin(\omega t - 90°) = i_{r0}\sqrt{1 + (r/R_L)^2}\cdot\sin(\omega t - \varphi),$$

ahol

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{R_L}, \quad \sin\varphi = \frac{r/R_L}{\sqrt{1 + r/R_L{}^2}} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (r/R_L)^2}}.$$

Ez lesz a kondenzátor árama: $i_r + i_L = i_C$. A kondenzátor feszültségkülönbsége ehhez képest késik 90°-kal:

$$U_{BC} = R_C i_C\sin(\omega t - \varphi - 90°) = R_C i_{r0}\sqrt{1 + (r/RL)^2}\cdot\sin(\omega t - \varphi - 90°).$$

Az egész berendezésre jutó teljes feszültségkülönbség, vagyis az A és C pontok között levő hálózati feszültség:

$$U = U_{AB} + U_{BC} = ri_{r0}\sin\omega t + R_C i_{r0}\sqrt{1 + (r/R_L)^2}\cdot\sin(\omega t - \varphi - 90°) =$$
$$= i_{r0}\sqrt{r^2 + R_C^2\left[1 + (r/R_L)^2\right] - 2rR_C\sqrt{1 + (r/R_L)^2}\cdot\sin\varphi}\cdot\sin(\omega t + \gamma) =$$
$$= i_{r0}\sqrt{r^2 + R_C^2 + r^2(R_C/R_L)^2 - 2r^2(R_C/R_L)}\cdot\sin(\omega t + \gamma) =$$
$$= i_{r0}\sqrt{R_C^2 + r^2(1 - R_C/R_L)^2}\cdot\sin(\omega t + \gamma).$$

Számításunk közben felhasználtuk $\sin\varphi$, illetve $\cos\varphi$ értékét, és azonos átalakításokat végeztünk.

Tehát ha azt akarjuk, hogy az izzólámpa-sorozaton a megkívánt $i_{r0} \sin \omega t$ váltóáram haladjon át, akkor A és B pontokra e képletünk által adott feszültséget kell kapcsolnunk. Ez a feszültség független lesz r ohmos ellenállástól, ha ennek $1 - R_C/R_L$ szorzója nullával egyenlő. Ebből következik a feladat megoldása:

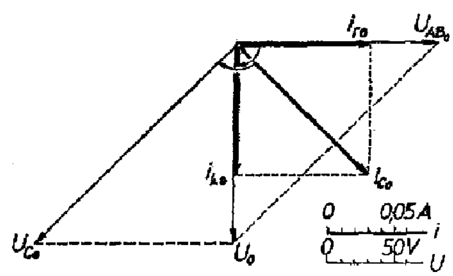
$$1 - R_C/R_L = 0, \qquad R_C = R_L, \qquad \frac{1}{\omega_C} = \omega L, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

tehát a rezonanciaesetet kell beállítanunk.

A szinuszok összegezéséből következik, hogy

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{R_C}{r(1 - Rc/RL)}.$$

Ha beállítjuk a rezonanciafeltételt, akkor $U = R_C i_0$ és $\gamma = -90°$, tehát az izzólámpa-sorozat árama amplitúdó és fázis tekintetében ugyanaz, mintha egyszerűen csak a kondenzátort kapcsoltuk volna a váltófeszültségre.

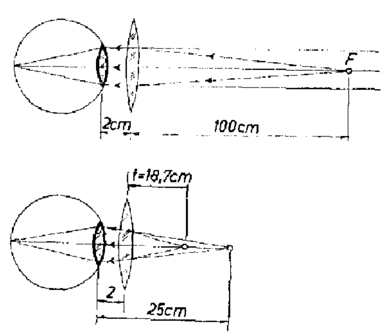


4. ábra

A vektordiagrammot 4. ábránk mutatja abban az esetben, ha $\omega = 314\ \mathrm{sec}^{-1}$, $C = 2 \cdot 10^{-6}$ farad, $R_C = 1500$ ohm, $L = 5$ henry, $R_L = 1500$ ohm, tehát teljesül a rezonanciafeltétel) és például $r = 1500$ ohm. Egymásra rajzoltuk a feszültségek és áramerősségek ábráját, mindegyiket a saját léptéke szerint; a feszültségeket folytonos, az áramerősségeket szaggatott vonalú nyilak mutatják. $i_{r0} = 0{,}1$ amperes értéket vettünk fel. Ugyanebben az irányban kellett felrajzolnunk az A, B pontokra jutó 150 voltos amplitúdójú feszültséget. Ennek hatására a tekercsben a $90°$-kal hátramaradó i_{r0} amplitúdójú váltóáram keletkezik, amelyet i_{r0}-lal összegezve kapjuk i_{C0}-t. A kondenzátor feszültsége ehhez képest $90°$-kal késik (U_{C0}). Végül ezt U_{AB_0}-lal egyesítve kapjuk a hálózati feszültség $U_0 = 150$ voltos amplitúdóját. Ha más ohmos ellenállás felhasználásával végezzük el a szerkesztést, az ábra részletei módosulnak, de U_0 végpontja ugyanoda esik.

3. *Normális látású ember* 25 *centimétertől végtelenig lát élesen. Milyen határok között fog élesen látni, ha szeme elé, a szemlencsétől* 2 *centiméterre egy* 1 *dioptriás gyűjtőlencsét helyez?*

Megoldás. Ha a szem végtelenre van élesre állítva, akkor a szemlencsébe párhuzamos sugarak érkeznek. A szem elé gyűjtőlencsét téve akkor jutnak a szembe párhuzamosan a sugarak, ha a gyűjtőlencse fókusztávolsága 100 cm, tehát az élesen látás egyik határa: 100 cm a lencsétől, illetve 102 cm a szemtől számítva (5. ábra)



5. ábra

Ha szemünk lencséje a 25 cm távolságból érkező sugarak számára van beállítva, akkor ez azt jelenti, hogy az 1 dioptriás lencse számára a virtuális képtávolság -23 cm. Ehhez t tárgytávolság tartozik, amelyet a lencsetörvényből számítunk ki:

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{t} + \frac{1}{-23}.$$

Innen $t = 18{,}7$ cm. Tehát ebben az esetben az élesen látás távolsága 18,7 cm a lencsétől, 20,7 cm szemünktől számítva.

A verseny eredménye: I. díjat nyert *Tichy Géza* (a budapesti Árpád gimnáziumban Peller József és Dömötör Gábor tanítványa), II. díjat nyert *Abos Imre* (a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnáziumban Petyerity Géza tanítványa), III. díjat nyert *Major János* (a budapesti Kandó Kálmán technikumban Bárczy Barnabás tanítványa). Dicséretet kaptak *Gács Iván* (a budapesti Bánki Donát technikumban Bangha József tanítványa), *Lánc József* (a budapesti I. István gimnáziumban Pálos Jenő tanítványa) és *Máthé István* (a budapesti Bánki Donát technikumban Galambos Imre tanítványa).