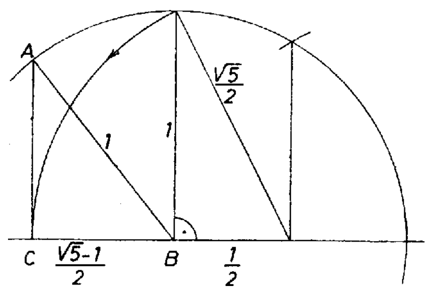
I. Legyen a kérdéses ABC háromszög AB átfogója egységnyi, kisebbik hegyesszöge $BAC\sphericalangle = \alpha$, így befogói $AC = \cos\alpha$ és $BC = \sin\alpha$, rövidítsük ezeket rendre c, s betűvel. A követelmény szerint $c^2 = 1 \cdot s$, így Pitagorasz tétele alapján

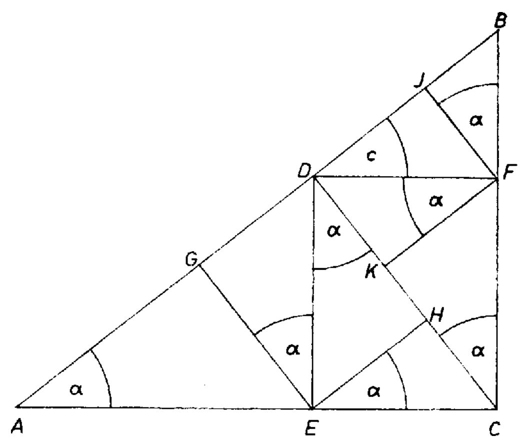
$$s^2 + s - 1 = 0, \quad s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\approx 0{,}6180).$$

Eszerint a háromszög megkapható az egységnyi sugarú körbe írt szabályos tíz- (és öt-)szög oldala ismert (ún. Ptolemaiosz – Dürer-féle) szerkesztésének egy lépéssel való kiegészítése útján, a k kör középpontja B, a tízszögoldal BC és a C-ben emelt merőlegesnek k-n levő pontja A (1. ábra).



1. ábra

II. Jelöljük a derékszög csúcsából húzott magasság talppontját az egymás utáni háromszögekben az alábbiak szerint (2. ábra):



2. ábra

háromszög:	ABC,	ACD,	BCD,	ADE,	CDE,	BDF,	CDF,
talppont:	D,	E,	F,	G,	H,	J,	K.

A keletkezett háromszögek hasonlók, mindegyik befogó egy továbbosztással keletkezett háromszögben átfogó lesz, így a szakaszok legtöbbje mint vetület fejezhető ki s-sel és c-vel, ill. a követelmény szerint egyedül c-vel:

$$DC = AC\sin\alpha = BC\cos\alpha = cs = c^3,$$

$$DA = AC\cos\alpha = c^2; \qquad DB = BC\sin\alpha = s^2 = c^4;$$

$$ED = CF = CD\cos\alpha = c^4, \qquad FD = CE = CD\sin\alpha = c^3 s = c^5,$$

$$EA = c^3, \qquad FB = c^6;$$

$$GE = DH = c^5, \quad GD = EH = c^6, \quad GA = c^4, \quad HC = c^7,$$

$$JF = DK = c^7, \quad JD = FK = c^6, \quad JB = c^8, \quad KC = c^5;$$

végül azok a megrajzolt szakaszok, amelyek nem oldalai a fenti háromszögek valamelyikének:

$$AJ = AB - JB = 1 - c^8 = 1 - s^4 = (1-s^2)(1+s^2) = c^2 \cdot \sqrt{5}s = \sqrt{5}c^4,$$

$$BG = AB - AG = 1 - c^4 = 1 - s^2 = c^2,$$

$$GJ = GD + DJ = 2c^6,$$

$$HK = CK - CH = c^5(1-c^2) = c^5 s^2 = c^9.$$

Ezek szerint a 10 pont közti megrajzolt 28 szakasz közül 26-nak a mértékszáma c-nek valamely nem negatív egész kitevős hatványával egyenlő. Mondjuk így: e szakaszok mindegyikéhez tartozik c-nek egy kitevője, és fordítva: a $0,\ 1,\ \ldots,\ 9$ kitevők mindegyikéhez hozzátartozik az ábrának legalább egy szakasza. A kitevők szerint csoportosítva:

$c^0 = AB$	$c^5 = FD, CE, EG, DH, KC$
$c = AC$	$c^6 = BF, DG, EH, JD, FK$
$c^2 = BC, AD, BG$	$c^7 = CH, JF, DK$
$c^3 = CD, AE$	$c^8 = JB$
$c^4 = BD, ED, CF, AG$	$c^9 = HK$

a hátra levő 2 szakasz pedig egy c-hatvány állandószorosa:

(1) $$AJ = \sqrt{5}c^4, \quad GJ = 2c^6.$$

Így minden olyan szakaszpárnak megtalálható a mértani középarányosa, amelynek a kitevői egyenlő párosságúak (és természetesen különbözők), pl. AB és BF mértani középarányosát adja CD is, AE is. És fordítva: a talált mértani sorozat első és utolsó tagját (AB-t és HK-t) kivéve minden szakaszhoz található olyan két (tőle különböző) szakasza az ábrának, melyeknek ő mértani középarányosa, pl. JB-hez egyrészt HK, másrészt CH, JF és DK bármelyike.

Az (1) szakaszok viszont ilyen szakaszhármasban nem szerepelhetnek, mert $\sqrt{5}$, ill. 2 állandó tényezőjük c-nek nem egész kitevős hatványa, a szorzatuk sem, és e kitevők nem is $n + 1/2$ alakúak, ahol n egész szám: $\sqrt{5} = c^{-3,345}$, $2 = c^{-2,881}$, $2\sqrt{5} = c^{-6,225}$.

Meghatározzuk végül a kérdéses szakaszpárok számát. Egy c^5 hosszúságú szakasz mértani középarányos minden lehetséges (c^4, c^6), (c^3, c^7), (c^2, c^8) és (c, c^9) pár között, ezek megválasztására $4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 30$ lehetőség van. (Ha még azt is nézzük, hogy a c^5 hosszú mértani közép szerepére az 5 ilyen szakasz melyikét választjuk, akkor az ilyen szakaszhármasok száma $5 \cdot 30 = 150$.) Hasonlóan

$$c, \quad c^2, \quad c^3, \quad c^4, \quad c^6, \quad c^7, \quad c^8$$

hosszúságú mértani közepet ad rendre

$$3, \quad 6, \quad 22, \quad 29, \quad 21, \quad 10, \quad 3$$

(különböző hosszúságú) szakaszpár, tehát a párok összes száma 124. (Az egyenlő hosszú szakaszok közti ilyen kapcsolatokat figyelmen kívül hagytuk.)

Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)