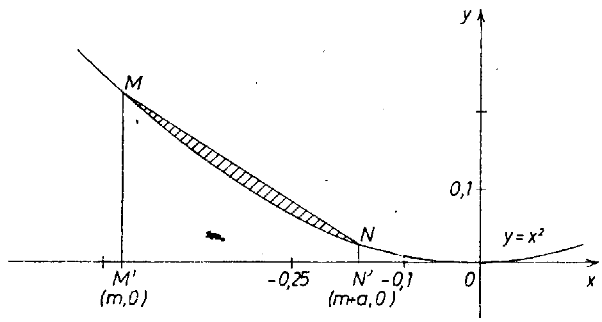
Minden parabola hasonló (egyetlen lineáris adat határozza meg, a fókusznak a vezéregyenestől való távolsága), ezért elég az állítást az $y=x^2$ egyenletű parabolára igazolni. Ennek vezéregyenese párhuzamos az x tengellyel, azt kell tehát belátnunk, hogy ha egy változó helyzetű húr M, N végpontjainak abszcisszái m és $m+a$, vagyis a kérdéses vetület hossza a, ahol a pozitív állandó, m pedig tetszés szerinti érték, akkor a húr által lemetszett parabolaszelet területe nem függ m-től.

Legyen M, N vetülete az x tengelyen M', N', akkor a szelet területe egyenlő a húr alatti $MNN'M'$ trapéz és az MN parabolaív alatti, ugyanezen csúcsokkal bíró görbe vonalú trapéz területének különbségével. (Amennyiben M vagy N a parabola csúcsában van, akkor trapézok helyett háromszögekről van szó, de ez a további számítást nem módosítja.)



A trapéz területe, mivel párhuzamos oldalai az $M'M=m^2$ és $N'N==(m+a)^2$ ordináták, magassága (szélessége) a,

$$MNN'M'=\frac{a}{2}(2m^2+2am+a^2)=am^2+a^2m+\frac{a^3}{2},$$

a görbe vonalú trapéz területe pedig

$$\int\limits_m^{m+a} x^2dx=\frac{1}{3}\left[(m+a)^3-m^3\right]=am^2+a^2m+\frac{a^3}{3},$$

tehát a szelet területe $\frac{a^3}{6}$, valóban nem függ m-től. Az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Természetesen a húr alatti trapéz területét is számíthattuk volna integrállal. A húr a

$$h(x)=m^2+\frac{(m+a)^2-m^2}{a}(x-m)$$

függvény képe, így

$$t=\int\limits_m^{m+a}\left(h(x)-x^2\right)dx.$$