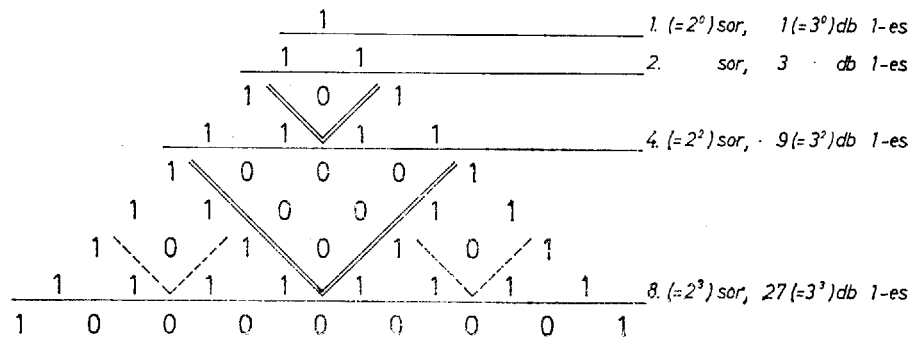


Feladatunkban a binomiális együtthatóknak csupán a páros vagy páratlan voltát kell tekintenünk, ezért megtehetjük, hogy a párosokat 0-sal, a páratlanokat 1-essel helyettesítjük. Az így módosított számelméletre is nyilvánvalóan érvényes a Pascal-háromszög elemeinek képezési eljárása: minden belső elem a fölötte álló két elem összege – de két szomszédos 1-es alatt közepén 2 helyett 0 áll –, továbbá minden sor két szélső eleme 1-es. Az új séma 1-eseinek számát kell megállapítanunk azokig az egyenesekig, amelyek a sémából 2^n számú sort vágnak le a csúcstól számítva, $n = 0, 1, 2$.

... Megjegyezzük, hogy az $\binom{u}{v}$, $0 \leq v \leq u$ együtthatók az $(u + 1)$ -edik sorát alkotják a sémának.

Felírva a módosított séma első 9 sorát, azt látjuk, hogy $n = 0, 1, 2, 3$ esetén a 2^n sorszámú sorig bezárólag az 1-esek száma valóban 3^n . A leszámolás helyett $n = 3$ esetén elég azt észrevenni, hogy a 2^2 és 2^3 számú sort levágó vízszintes vonalak közti trapéz a berajzolt ferde vonalakkal 3 háromszögre vágva a két szélső háromszög „egybevágó” a sémának a trapéz fölötti háromszögével (azaz helyről helyre ugyanazt a számot tartalmazza), a közbülső háromszög pedig egyetlen 1-est sem tartalmaz. Így a trapézban 2-szer annyi 1-es áll, mint fölötte, tehát azokat is véve, együttes számuk 3-szor annyi, mint a felső háromszögben.



Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett sorok számát 2^n -ről 2^{n+1} -re emelve – azaz megkétszerezve – ez a tulajdonság megismétlődik. Így – ha az első 2^n sorban levő 1-esek száma N , akkor az első 2^{n+1} sorban levők száma $(1 + 2)N = 3N$. Ehhez csupán azt tesszük föl, hogy a 2^n sorszámú sor minden eleme 1-es (ahogyan $n = 0, 1, 2, 3$ -ra látjuk), szám szerint 2^n db 1-esből áll (hiszen a séma minden sora annyi elemet tartalmaz, amennyi a sorszám).

Feltevésünk folytán a $(2^n + 1)$ -edik sorba a 2^n -edik sor $(2^n - 1)$ szomszédos párja alá ugyanennyi 0 kerül belső elemként, mivel $1 + 1$ páros és csupán a külön szabály szerint képezett két szélső elem lesz 1-es. A mondott 0-ok szomszédos párjai alá ismét 0 kerül, számuk 1-gyel kevesebb, hiszen e elemből $(e - 1)$ szomszédos pár képezhető, vagyis itt $(2^n - 2)$. Ez ismétlődik a $2^n + (2^n - 1) = (2^{n+1} - 1)$ -edik sorig, amíg a 0-ok száma 1-re csökken, tehát kialakul a 0-ok háromszöge. Így pedig a $(2^n + 1)$ -edik sor első és utolsó 1-eséből a trapéz két szélső háromszöge valóban ugyanúgy alakul ki, mint a séma első 2^n sora (azzal valóban „egybevágók”) és a $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ -edik sor $2 \cdot 2^n$ számú 1-esből áll, a föltett tulajdonság a 2^n -edik sorról öröklődik a 2^{n+1} -edik sorra.

Ez pedig az előrebecsültak szerint az 1-esek számának megháromszorozódását jelenti, az állítást bebizonyítottuk.

Selényi Péter (Budapest, Kvassay J. Híd-és Vízműépítési Techn., Ill. o. t.)

Megjegyzés. Meg lehet mutatni azt is, hogy a Pascal-háromszög minden egyes sorában a páratlan együtthatók száma 2^k alakú, ahol $k \geq 0$, egész.