I. Megoldás. Két szám, u és v, harmonikus közepén, h-n reciprokuk számtani közepének reciprokát értjük:

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right), \quad \text{ahonnan} \quad h=\frac{2uv}{u+v},$$

aminek csak akkor van értelme, ha u, v és $u+v$ egyike sem 0.

Legyenek (1) gyökei x_1, x_2, x_3, és játssza a kiemelt szerepet x_2, ekkor

$$x_2=\frac{2x_1x_3}{x_1+x_3}. \tag{2}$$

Ismeretes[1], hogy a három gyök és (1) együtthatói között a következő összefüggések állnak fönn:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

Ide (2)-t beírva, az x_1, x_3 ismeretlenekre három egyenletünk van, ami csak úgy teljesülhet, ha a jobb oldalak között bizonyos összefüggés áll fönn. Éppen ennek keresése a feladat, úgy kapjuk, hogy valamelyik két egyenlet alapján meghatározzuk x_1-et és x_3-at és ezt a hátra levőbe helyettesítjük.

$$x_1+x_3+\frac{2x_1x_3}{x_1+x_3}=-\frac{b}{a}, \tag{3}$$

$$x_1x_3+(x_1+x_3)x_2=3x_1x_3=\frac{c}{a}, \tag{4}$$

$$\frac{2x_1^2x_3^2}{x_1+x_3}=-\frac{d}{a},$$

és a másodikból azt látjuk, hogy $c\neq 0$-nak is fönn kell állania, hiszen $d\neq 0$ miatt egyik gyök sem 0. (4) alapján az utolsóból

$$x_1+x_3=-\frac{2a}{d}(x_1x_3)^2=-\frac{2a}{d}\cdot\left(\frac{c}{3a}\right)^2=-\frac{2c^2}{9ad}, \tag{5}$$

ami (4)-gyel együtt kétismeretlenes egyenletrendszert jelent az x_1, x_3 párra.

Nincs azonban szükség x_1 és x_3 külön kifejezéseire, mert (3)-ban éppen x_1 és x_3 szimmetrikus függvényeire van szükség, így (3)-ból (5) és (4) alapján a keresett összefüggés:

$$-\frac{2c^2}{9ad}+\left(\frac{2c}{3a}\right)\cdot\left(-\frac{9ad}{2c^2}\right)=-\frac{2c^2}{9ad}-\frac{3d}{c}=-\frac{b}{a},$$

ill. a szokásos rendezéssel

$$27ad^2-9bcd+2c^3=0, \tag{6}$$

hacsak $ad\neq 0$. (A közben talált $c\neq 0$ feltételt nem kell ismételnünk, mert (6)-ból

$$c=\frac{27ad^2}{9bd-2c^2}\neq 0.)$$

II. megoldás. Legyenek (1) gyökei x_1, x_2, x_3. Mivel $a\neq 0$, azért az egyenlet valóban harmadfokú, és mivel $d\neq 0$, azért egyik gyök sem lehet 0-val egyenlő. Ha a gyökök közül az egyik harmonikus közepe a másik kettőnek, akkor e gyökök reciprokai közül az egyik a másik kettő számtani közepe. E gyökök reciprokai a

$$dx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{7}$$

egyenlet gyökei, hiszen pl. az, hogy x_1 gyöke (1)-nek, azt jelenti, hogy

$$ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0,$$

ahonnan x_1^3-nel osztva (ami $\neq 0$), kapjuk, hogy $\dfrac{1}{x_1}$ gyöke (7)-nek.

(7) gyökeit y_1, y_2, y_3-mal jelölve, a gyökök és együtthatók összefüggése szerint

$$y_1+y_2+y_3=-\frac{c}{d}, \quad y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{b}{d}, \quad y_1y_2y_3=-\frac{a}{d}. \tag{8}$$

[1] Lásd pl. *Hack F.:* Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések (Tankönyvkiadó, Budapest, 1967), 62. old., 251. 333-335. jelzőszám.

E gyökök közül akkor és csakis akkor lesz egyik a másik kettőnek számtani közepével egyenlő, ha az

$$S = (2y_1 - y_2 - y_3)(2y_2 - y_3 - y_1)(2y_3 - y_1 - y_2)$$

szorzat értéke 0. (8) alapján S kifejezhető az egyenlet együtthatóival:

$$\begin{aligned} S &= \left(3y_1 + \frac{c}{d}\right)\left(3y_2 + \frac{c}{d}\right)\left(3y_3 + \frac{c}{d}\right) = \\ &= 27y_1y_2y_3 + 9(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)\frac{c}{d} + 3(y_1 + y_2 + y_3)\frac{c^2}{d^2} + \frac{c^3}{d^3} = \\ &= -\frac{27a}{d} + \frac{9bc}{d^2} - \frac{3c^3}{d^3} + \frac{c^3}{d^3} = \frac{1}{d^3}(-27ad^2 + 9bcd - 2c^3). \end{aligned}$$

S tehát akkor és csakis akkor 0, ha (6) teljesül, vagyis (6) szükséges és elegendő feltétele annak, hogy (1) gyökei közül egyik a másik kettőnek harmonikus közepe legyen.