Haladók (II. osztályosok) *versenye*

1. feladat. *Számítsuk ki a következő összeget:*

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}. \tag{1}$$

Megoldás. Próbáljuk meg a négyzetgyök alatti különbségeket egy-egy különbség négyzetévé alakítani. Kézenfekvő egész számokból vont négyzetgyökök különbségére gondolni, tehát megpróbálni

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}=a+b-\sqrt{4\,ab}$$

alakra hozni az egyes gyökjelek alatti értékeket. Az első tag esetében ekkor $a+b=7$, $ab=48/4=12$ kell hogy fennálljon, és ennek a 3, 4 számpár megfelel. Mivel a négyzetgyök pozitív értékét keressük, így

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}.$$

Hasonlóan a második tag esetében az $a+b=5$, $ab=6$ egyenletrendszer adódik; megoldása 2, 3, s így

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{3}-\sqrt{2};$$

a harmadik tagnál pedig $a+b=3$, $ab=2$ megoldása az 1, 2 számpár, s így

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{2}-1.$$

Ezeket összeadva

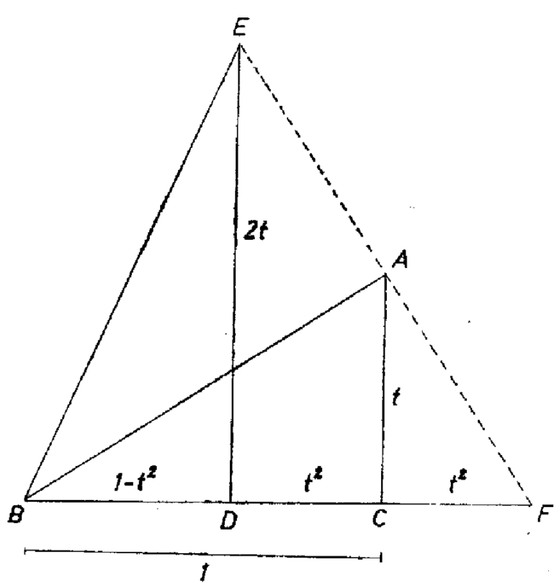
$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=1.$$

Megjegyzés. A fenti eljárással általában különbséggé alakítható egy $\sqrt{u\pm\sqrt{v}}$ alakú kifejezés (ahol $u, v>0$, $u^2>v$). Ez esetben az előbbi gondolatmenet az $a+b=u$, $4\,ab=v$ egyenletrendszerre vezet. Ennek a gyökei az $x^2-ux+v/4=0$ egyenletnek tesznek eleget, tehát az $\left(u\pm\sqrt{u^2-v}\right)/2$ értékek, így a

$$\sqrt{u\pm\sqrt{v}}=\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2-v}}{2}}\pm\sqrt{\frac{u-\sqrt{u^2-v}}{2}}$$

azonossághoz jutunk.

2. feladat. *Legyen egy derékszögű háromszög hosszabbik befogója 1, a rövidebb t hosszúságú. Legyen egy másik derékszögű háromszög két befogójának hossza $2t$ és $1-t^2$. Mutassuk ki, hogy a második háromszögnek a $2t$ hosszúságú befogóval szemközti szöge az eredeti háromszög legkisebb szögének kétszerese!*



1. ábra

I. megoldás. Rajzoljunk C-nél derékszögű háromszöget $AC = t$, $BC = 1$ hosszúságú befogókkal; mérjük rá a BC befogóra a $BD = 1 - t^2$ hosszúságot, majd a D-ben a BC egyenesre emelt merőlegesre az egyenes A-t tartalmazó oldalán a $DE = 2t$ hosszúságot. Ekkor azt kell bebizonyítanunk, hogy $EBD\sphericalangle = 2\,ABC\sphericalangle$, vagyis hogy AB felezi az EBD szöget. Ez következik abból, ha megmutatjuk, hogy az EA egyenes az EBD szögtartományból egyenlő szárú háromszöget vág le, amelynek AB a szimmetriatengelye.

Jelöljük az EA és BD egyenes metszéspontját F-fel. AC az FED háromszög középvonala, mert párhuzamos ED-vel, és fele akkora. Ha ugyanis A és C közelebb, ill. messzebb volna F-től, mint a megfelelő oldal felezőpontja, akkor összekötő egyenesük is kisebb, ill. nagyobb volna, mint ED fele. Ezek szerint $EA = AF$, és $FC = CD = CB - DB = 1 - (1 - t^2) = t^2$. Az FAC és ABC háromszögek hasonlók, mert mindkettő C-nél derékszögű, és a befogók aránya egyenlő:

$$\frac{AC}{FC} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{BC}{AC}.$$

A megfelelő befogók egymáshoz képest ugyanolyan irányban $90°$-kal vannak elforgatva, így ugyanez áll az átfogókra is: $FA \perp AB$.

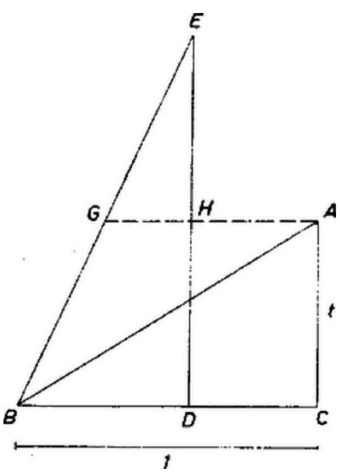
Ezzel beláttuk, hogy AB az EF szakaszt felező és arra merőleges egyenes, tehát az EBF háromszög szimmetriatengelye; így az $EBF\sphericalangle = EBD\sphericalangle$ szögfelezője.

II. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC és EBD háromszögeket ugyanúgy, mint az előző megoldásban. Messe az A-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes BE-t és DE-t G-ben és H-ban. GH a BDE háromszög középvonala, mert $DH = CA = t = \frac{1}{2}DE$, és $GH \| BD$, tudjuk továbbá, hogy a középvonal is párhuzamos BD-vel, és H-n át csak egy ilyen párhuzamos húzható. Így egyrészt Pythagorász tétele szerint (2. ábra)

$$BG = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}\sqrt{BD^2 + DE^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2} = \frac{1+t^2}{2},$$

másrészt

$$GA = GH + HA = \frac{BD}{2} + DC = \frac{1-t^2}{2} + [1 - (1 - t^2)] = \frac{1+t^2}{2}.$$



2. ábra

Eszerint az ABG háromszög egyenlő szárú, így – felhasználva azt is, hogy $GA \| BC$ –

$$EBA\sphericalangle = GBA\sphericalangle = GAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle,$$

tehát $EBD\sphericalangle = 2\,ABD\sphericalangle$, és ezt kellett bizonyítanunk.

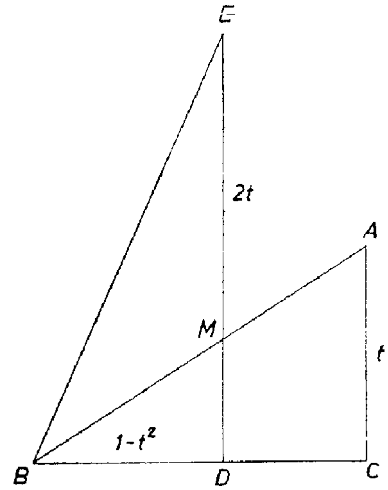
(Tulajdonképpen azt bizonyítottuk, hogy a G közepű $(1 + t^2)/2$ sugarú kör A pontjában érinti AC-t, tehát A az érintővel párhuzamos húrhoz tartozó ED ív felezőpontja.)

III. megoldás. Ismét az előző megoldásban látott módon helyezzük el a két háromszöget. Jelöljük AB és DE metszéspontját M-mel. Elég megmutatnunk, hogy M ugyanolyan arányú két részre osztja DE-t, mint a szögfelező, ugyanis ha egy P pont a DE szakaszon D-től E felé mozog, akkor a DP/PE arány számlálója nő, nevezője csökken, és így a tört értéke állandóan nő, egy értéket csak egyszer vesz fel.

Tudjuk, hogy a szögfelezőre nézve a szóban forgó osztásarány megegyezik a BD/BE aránnyal, mivel pedig

$$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2} = 1 + t^2,$$

így a szögfelező által kimetszett szeletek aránya $(1 - t^2)/(1 + t^2)$.



3. ábra

Az ABC és MBD háromszögek hasonlók, így befogóik arányára:

$$\frac{MD}{BD}=\frac{AC}{BC},\quad MD=\frac{AC\cdot BD}{BC}=t(1-t^2).$$

Ezt felhasználva nyerjük, hogy

$$\frac{DM}{ME}=\frac{t(1-t^2)}{2t-t(1-t^2)}=\frac{t(1-t^2)}{t(1+t^2)}=\frac{BD}{BE}.$$

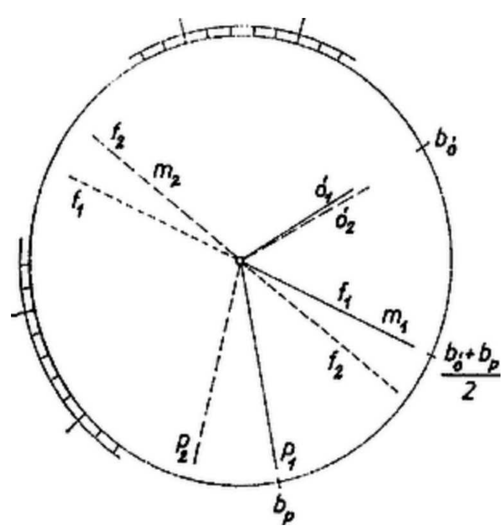
Az M pont tehát ugyanolyan arányú részekre osztja DE-t, mint a szögfelező, és ezzel beláttuk, hogy BM azonos az EBD szög felező egyenesével.

3. feladat. *Az óramutató, a percmutató és a másodpercmutató közös tengely körül forognak. Adjuk meg azokat az időpontokat, amikor a másodpercmutató felezi az óramutató és a percmutató által bezárt szöget!*

I. megoldás. Célszerű a szögmérés egységéül az óra számlapjának percbeosztását, azaz a teljes körülfordulás 60-adrészét választani.

Két mutató az óra számlapját két körcikkre osztja, ezeket ugyanannak az egyenesnek a tengelyből induló két félegyenese felezi. Az óramutatók fedése esetén az egyik körcikk a teljes körlemezbe, a másik a kör egy sugarába megy át; ennek az egyenese tekinthető ilyenkor a szögfelezőnek.

Egy a feltételeket kielégítő H_1 helyzetből kiindulva határozzuk meg azt az időtartamot (másodpercben mérve), ami alatt a legközelebbi megfelelő H_2 helyzetbe jutnak a mutatók. A másodpercmutató t másodperc alatt t beosztással mozdul el; a H_2 helyzetben a szögfelezőnek a másik félegyenesével kerül fedésbe, mint a H_1 helyzetben. Tekintetbe kell vennünk azt is, hogy időközben a szögfelező helyzete is megváltozott. Azt az ívet vizsgálva, amelyik az óramutatótól a mutatók járása irányában a percmutató felé terjed, t másodperc alatt az óramutató $\frac{5}{60\cdot 60}\cdot t=\frac{t}{720}$ beosztást halad előre, a percmutató $\frac{t}{60}$ beosztást.



4. ábra

Ha a H_1 helyzetben az óramutató a b_0 beosztásnál, a percmutató pedig b_p-nél volt, akkor a szögfelező helyzete $(b_0+b_p)/2$ volt, t másodperc múlva pedig $(b_0+t/720+b_p+t/60)/2=(b_0+b_p)/2+13t/1440$, tehát a szögfelező $13t/1440$ beosztással jutott tovább.[1] Azt, hogy i idő elteltével a másodpercmutató a szögfelezőnek a H_1 helyzetben fedett félegyenesével ellentétes irányú félegyenesével került fedésbe, az

$$i=\frac{13i}{1440}+30$$

egyenlet fejezi ki. Innen $i=\dfrac{1440}{1427}\cdot 30=30+\dfrac{390}{1427}$ mp. Ez nem tartalmazza a H_1 helyzetet jellemző adatokat, így azt nyertük, hogy bármely két egymásutáni, a feltételeket kielégítő helyzet közt a nyert i idő telik el.

A három mutatónak 0 óra 0 perc 0 másodperckor elfoglalt helyzete kielégíti a követelményt, tehát az összes megfelelő időpontok i többszörösei:

$$t=k\cdot\left(30+\frac{390}{1427}\right)\ \text{mp}=$$
$$=\frac{43\,200\,k}{1427}\ \text{mp}=\frac{720\,k}{1427}\ \text{perc},$$

ahol k egész szám. Ha $k=1427$, akkor $t=720$ perc $=12$ óra. És ettől kezdve ismétlődnek a mutatóállások; $k=0,1,2,\ldots,1426$ értékekhez viszont csupa különböző mutató-állások tartoznak, hiszen az óramutató egyszer jár körbe, tehát biztosan mindig más helyzetben van.

II. megoldás. Azt az időt, ami két egymás utáni megfelelő helyzet közt telik el, kiszámíthatjuk a következő módon is: Az olyan helyzetek időpontjait keressük, amelyekben a szögfelező *egyenese* és a másodpercmutató *egyenese* fedi egymást. Ez 12 óra alatt annyiszor következik be, amennyivel többször kerül az utóbbi kiindulási helyzetébe, mint az előbbi, tekintettel arra, hogy a 12 óra végén mindkét egyenes éppen közös kiindulási helyzetébe tér vissza.

A másodpercmutató egyenese félpercenként kerül vissza eredeti helyzetébe, tehát 12 óra alatt $12\cdot 60\cdot 2=1440$-szer. A szögfelező egyenese, mint láttuk, $13/1440$ beosztást halad előre másodpercenként, tehát 12 óra alatt $12\cdot 60\cdot 60\cdot 13/1440=30\cdot 13$ beosztásnyi utat tesz meg. Ez alatt 13-szor kerül fedésbe eredeti helyzetével, miután ez 30 beosztásnyi elforduláskor következik be. A másodpercmutató egyenese tehát 12 óra alatt $1440-13=1427$-szer találkozik a szögfelező egyenesével, s így két egymás utáni találkozás közt $12\cdot 60\cdot 60/1427=30+390/1427$ másodperc telik el.

Lőrincz Pál, Surányi János

[1] A 4. ábra az elfordulásokat nagyítva tünteti fel.