1. feladat. *Bizonyítandó, hogy ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 2.$$

I. megoldás. Írjunk γ helyébe $180° - (\alpha+\beta)$-t, majd igyekezzünk szorzattá alakítani:

$$\begin{gathered}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ = \cos\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ = 1 - (1-\cos\alpha) + (1-\cos\alpha)\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ = 1 - (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) + \sin\alpha\sin\beta.\end{gathered}$$

Itt a második tag nem pozitív, mert a koszinusz-függvény nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, a harmadik pedig kisebb 1-nél, mert egyik tényezője sem nagyobb 1-nél, de nem lehet mindkettő egyszerre 1 sem (nem lehet α is, β is $90°$). Így

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 2,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Az állítás helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű, mert ekkor az egyik tag nem pozitív, a másik kettő mindegyike pedig 1-nél kisebb.

Hegyesszögű háromszögben válasszuk a betűzést úgy, hogy γ és a vele szemben levő $AB = c$ oldal legyen a legkisebb, illetve a legkisebbek egyike. Jelöljük továbbá γ csúcsát C-vel, az AC, BC oldalakat b-vel, ill. a-val; legyen C merőleges vetülete az AB egyenesen C_1, ez az oldal belső pontja. Így

$$c = AC_1 + C_1B = b\cos\alpha + a\cos\beta.$$

Innen, mivel feltevés szerint $a \geqq c$, $b \geqq c$, így

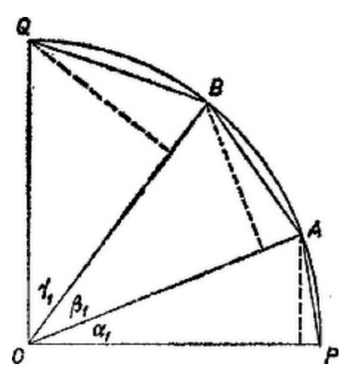
$$1 = \frac{b}{c}\cos\alpha + \frac{a}{c}\cos\beta \geq \cos\alpha + \cos\beta;$$

a harmadik szögre $\cos\gamma < 1$, tehát helyes az állítás hegyesszögű háromszögben is.

III. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség, mint az előző megoldásban is láttuk, nyilvánvalóan helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű. Hegyesszögű háromszögre $\alpha_1 = 90° - \alpha$, $\beta_1 = 90° - \beta$, $\gamma_1 = 90° - \gamma$ pozitív hegyesszögek, melyek összege $90°$, és

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha_1 + \sin\beta_1 + \sin\gamma_1.$$

Ezt az összeget szemléltethetjük a következő módon: egységnyi sugarú OPQ negyedkörbe rajzoljuk be az α_1, ill. β_1 nagyságú POA, AOB szögeket (1. ábra).



1. ábra

Ekkor $BOQ\sphericalangle = \gamma_1$, és a POA, AOB, BOQ háromszögekben a sugár alkotta oldalakra merőleges magasság hossza rendre $\sin\alpha_1$, $\sin\beta_1$, $\sin\gamma_1$, így a vizsgálandó összeg az $OPABQ$ ötszög területének kétszeresével egyenlő, tehát kisebb, mint az egységnyi sugarú félkör területe, $\pi/2$. Hegyesszögű háromszögre tehát

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < \frac{\pi}{2}(< 1{,}571).$$

IV. megoldás. Alakítsuk két koszinusz összegét szorzattá:

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leq 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen $\alpha/2$ és $|\beta-\gamma|/2$ hegyesszögek. Fejezzük ki $\cos\alpha$-t is a fele akkora szög szinuszával, akkor azt nyerjük, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

A második tag nem lehet pozitív, így a bizonyítandó állításon túlmenően azt bizonyítottuk be, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Itt akkor érvényes az egyenlőség jele, ha egyrészt $\cos\big((\beta-\gamma)/2\big)=1$, másrészt $\sin(\alpha/2)=1/2$. Az első egy háromszög szögeire csak akkor teljesül, ha $\beta=\gamma$, a második akkor, ha $\alpha=60°$; ekkor az első feltétel szerint $\beta=\gamma=60°$, azaz a háromszög szabályos.

Az (1) egyenlőtlenségben tehát szabályos háromszögre egyenlőség, más háromszögekre a „kisebb" jel érvényes.

Megjegyzés. Az előző megoldás ábrája alapján finomabb elemzéssel szintén bizonyítható az (1) egyenlőtlenség hegyesszögű háromszögre, és kiterjeszthető a meggondolás nem hegyesszögű háromszögekre is.

V. megoldás. Fejezzük ki a szögek koszinuszát a koszinusz-tétel alapján az oldalakkal. Vizsgáljuk először két koszinusz összegét:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}+\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}=$$
$$=\frac{a^2-b^2}{2c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)-\frac{(a+b)(a-b)^2}{2abc}.$$

Mindhárom szögpárra felírva a megfelelő kifejezést és összeadva azokat, a pozitív tagok összegében fellép miden törttel a reciproka is, így az összeg a következőképpen alakítható tovább:

$$2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)-$$
$$-\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2abc}=$$
$$=3+\frac{1}{2}\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}\right)-$$
$$-\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2abc}=3-$$
$$-\frac{(a+b-c)(a-b)^2+(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2}{2abc}\le 3,$$

ugyanis mindegyik négyzet szorzója pozitív, mert a háromszög két oldalának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Így

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Itt akkor áll egyenlőség, ha a fenti tört számlálójában $a-b=b-c=c-a=0$, azaz szabályos háromszögre.

Megjegyzés: többen észrevették a bal oldal következő átalakítási lehetőségét:

$$\frac{a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2-a^3-b^3-c^3}{2abc}=$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)+2abc}{2abc}.$$

Innen Heron képletét, az $abc=4rt$ és $t=\varrho s$ összefüggéseket felhasználva, ahol s a kerület felét, t a háromszög területét, r és ϱ a körülírt és beírt kör sugarát jelöli, a következőt nyerjük:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{16t^2}{16rts}=1+\frac{\varrho}{r}.$$

Világos, hogy $\varrho<r$, amiből következik a feladat állítása. Az is belátható (trigonometria felhasználása nélkül is), hogy $\varrho\le r/2$, amiből (1) következik.

2. feladat. *Öt egész szám számtani sorozatot alkot. Akár az első négy tag köbeinek összegét vesszük, akár az utolsó négy tag köbeinek összegét, mindkétszer a figyelembe vett tagok összege négyzetének 16-szorosát kapjuk. Határozzuk meg a számokat.*

I. megoldás. Jelöljük a középső számot c-vel, a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a feladat feltételei:

$$(1)\qquad (c-2d)^3+(c-d)^3+c^3+(c+d)^3= \\ =16(c-2d+c-d+c+c+d)^2=16(2(2c-d))^2,$$

$$(2)\qquad (c-d)^3+c^3+(c+d)^3+(c+2d)^3= \\ =16(c-d+c+c+d+c+2d)^2=16(2(2c+d))^2.$$

A második az elsőből megkapható úgy, hogy d helyébe $-d$-t írunk (és a tagokat fordított sorrendbe írjuk), ez felhasználható lesz az átalakítások meggyorsítására. Az (1) egyenletet rendezve és 2-vel egyszerűsítve

$$2c^3-3c^2d+9cd^2-4d^3=128c^2-128cd+8d^2.$$

Hasonlóan (2)-ből

$$2c^3+3c^2d+9cd^2+4d^3=128c^2+128cd+8d^2.$$

Vonjuk le a második egyenletből az elsőt és osszunk 2-vel:

$$3c^2d+4d^3=128cd.$$

Ez teljesül, ha $d=0$. Ekkor (1)-ből

$$4c^3=256c^2,\quad c=0\quad \text{vagy}\quad c=64.$$

Ha $d\neq 0$, akkor a

$$3c^2-128c+4d^2=0$$

egyenletnek kell teljesülnie. Szorozzunk 3-mal és egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté:

$$(3)\qquad (3c-64)^2+3(2d)^2=2^{12}.$$

Itt, ha c egész, a bal oldal első tagja nem 0, és feltevésünk szerint a második sem. Legyen $3c-64=2^ku$, $2d=2^lv$, ahol u, v páratlan és $k,\ l<6$. Nem lehet k és l különböző, mert akkor 2 alkalmas hatványának kiemelése után 1-nél nagyobb páratlan szám marad vissza, s így nem keletkezhet a jobb oldali 2^{12} érték. Ha $k=l$, akkor az

$$u^2+3v^2=2^{12-2k}=4^{6-k}$$

egyenlethez jutunk, amelynek páratlan u és v-ből álló megoldását keressük. Ismeretes, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul. Az egyenlet bal oldala eszerint 8-cal osztva 4-et ad maradékul, tehát csak úgy lehet 2-nek egy hatványa, ha egyenlő 4-gyel, azaz $k=5$, $u=\pm1$, $v=\pm1$, tehát

$$3c-64=\pm32,\quad 2d=\pm32.$$

Az első egyenletből csak pozitív előjel mellett kapunk egész c-t:

$$c=32,\quad d=\pm16.$$

A feladat feltételeinek tehát a

0, 0, 0, 0, 0	64, 64, 64, 64, 64
0, 16, 32, 48, 64	64, 48, 32, 16, 0

sorozatok felelhetnek meg, és a számításokat elvégezve azt találjuk, hogy ezek valóban meg is felelnek.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva az (1) egyenlet bal oldalán az első és utolsó, továbbá a második és harmadik tag összegét alakítsuk át az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság alapján. Ekkor a bal oldal így alakul:

$$(2c-d)[(c-2d)^2-(c-2d)(c+d)+(c+d)^2]+(2c-d)[(c-d)^2- \\ -(c-d)c+c^2]=(2c-d)(2c^2-2cd+8d^2).$$

Így az egyenletet 0-ra redukálva $2(2c-d)$-t kiemelhetünk:

$$2(2c-d)(c^2-cd+4d^2-64c+32d)=0.$$

Hasonlóan a (2) egyenletből

$$2(2c+d)(c^2+cd+4d^2-64c-32d)=0.$$

Ha $d=2c$, akkor az előbbi egyenlet teljesül, az utóbbi így alakul:

$$(4)\qquad 8c^2(19c-128)=0.$$

Ennek egész gyöke csak $c=0$, amiből $d=0$.

A $d=-2c$ esetben az előbbi egyenlet megy át (4)-be, s így újabb megoldást nem kapunk.

Ha $d\neq\pm2c$, akkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$c^2-cd+4d^2-64c+32d=0,$$
$$c^2+cd+4d^2-64c-32d=0.$$

Az egyenletek összegének felét és különbségének felét véve az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, hiszen az utóbbiak különbsége, ill. összege az eredeti egyenleteket adja:

$$c^2+4d^2-64c=c(c-64)+4d^2=0,\qquad (c-32)d=0.$$

Az utóbbi egyenletből vagy $c=32$, vagy $d=0$ kell, hogy teljesüljön. Az első esetben az előbbi egyenletből

$$4d^2=32^2\qquad d=\pm16,$$

az utóbbi esetben pedig

$$c=0,\qquad \text{vagy } c=64.$$

Ezek az előbbi megoldásban talált számtani sorozatokra vezetnek.

Megjegyzések. 1. A feltételek két ismeretlenre két egyenletet adnak, ezekből az ismeretlenekre véges sok értékpár adódik. Mint a II. megoldás mutatja, nem szükséges lényegesen kihasználni a számok egész voltát, mindössze a többi feltételeket kielégítő

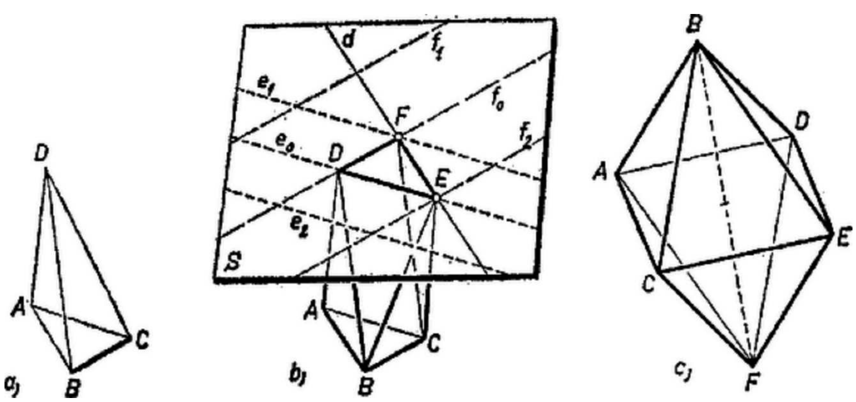
$$-384/19,\ -128/19,\ 128/19,\ 384/19,\ 640/19$$

és az ennek megfordításával keletkező sorozat kizárására.

2. Az I. megoldásban az (1) és (2)-ből keletkező (3) egyenletet oldottuk meg a keresett számok egész voltát lényegesen kihasználva. A közben felmerült $c=32/3$, $d=\pm16$ értékpárokhoz tartozó számtani sorozatok nem csak nem állnak egészekből, de a feladat többi feltételét sem elégítik ki. Ez nem meglepő, hiszen a megoldott (3) egyenlet nem ekvivalens az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszerrel. Ezért az I. megoldásnál szükséges a nyert sorozatokra a követelmények teljesülésének ellenőrzése. Az előző pontban említett nem egész sorozat viszont az I. megoldásban nem jelentkezett, amit az magyaráz, hogy ott csak egész megoldást kerestünk, $c=128/19$, $d=\pm256/19$-höz pedig a (3) egyenletnek nem egész megoldása tartozik.

3. feladat. *Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek bármely négy nem egy síkban levő csúcsa ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg?*

I. megoldás. 1. Keressük először az olyan poliédereket, amelyeknek minden határlapja háromszög. Legyen a poliéder egy AB élén átmenő két határlap ABC és ABD. Az $ABCD$ háromoldalú gúla tekinthető a feladat követelményeit kielégítő poliédernek (nem választható ki több különböző csúcsnégyes, 2. *a.* ábra).



2. *ábra*

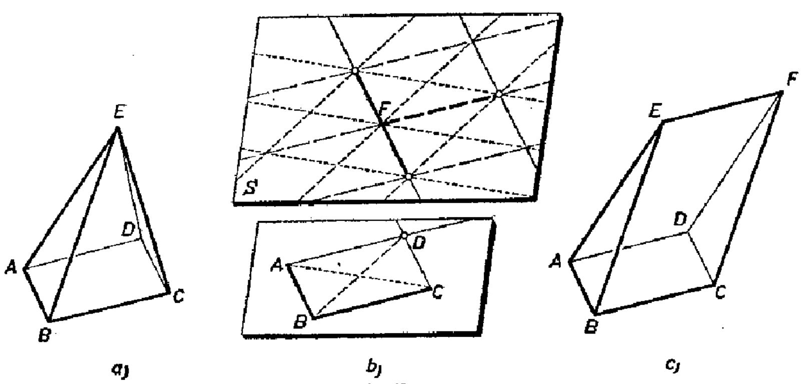
Ha a poliédernek négynél több csúcsa van, akkor minden további csúcsnak a D-n átmenő, ABC-vel párhuzamos S síkban kell lennie, mert az ABC síkban több csúcs nincs, a többi csúcs ennek a síknak ugyanazon oldalán van, mint D, és a síktól ugyanakkora távolságra, mint D, mert különben az A, B, C csúcsokkal $ABCD$-étől különböző térfogatú gúlát alkotna. Ugyanígy benne vannak a további csúcsok a C-n átmenő, ABD-vel párhuzamos síkban is, tehát a két sík d metszésvonalán kell lenniük (2. *b.* ábra).

A további csúcsok ezenkívül az A, C, D csúcsokkal is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy az ACD síkban vannak. Az előbbi esetben viszont annak a két az ACD síkkal párhuzamos síknak egyikében vannak, amelyek olyan távolságra vannak az ACD síktól, mint a B csúcs. Ezek a síkok S-t egy a D-n átmenő e_0 és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos e_1 és e_2 egyenesben metszik. Ezek párhuzamosak AC-vel, d-ből két az AB-vel egyenlő szakaszt metszenek ki. Tekintetbe véve még azt is, hogy a további csúcsok BCD-vel is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy a BCD síkban vannak, S-ben egy D-n átmenő, BC-vel párhuzamos f_0 egyenest és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos f_1 és f_2 egyenest kapunk, amelyek távolsága f_0-tól akkora, mint az A csúcsé BC-től.

A d egyenes azon pontjai lehetnek csúcsai a poliédernek, amelyeken egy e_i és egy f_j egyenes is átmegy. Az ilyen pontok az e_0 egyenes E metszéspontja és f_0-nak az F metszéspontja. Ugyanis a DEF háromszög egybevágó CAB-vel, mert oldalaik ellentétes irányban párhuzamosak, és D-ből, ill. C-ből húzott magasságaik egyenlők. Ha a két pont egyikét vesszük csak hozzá A, B, C, D-hez, akkor keletkezik egy paralelogramma-lap, mi pedig most csak háromszögekkel határolt poliédert keresünk.

Az $ABCEFD$ poliédert csupa háromszöglap határolja, úgy származtatható pl. az $ABCFD$ paralelogramma-alapú gúlából, hogy azt az alaplap középpontjára tükrözzük. Nevezzük röviden kettős gúlának. Ez megfelel a feladat követelményeinek, mert akárhogy választunk ki négy csúcsot, az A, E, a B, F és a C, D szemben fekvő csúcspárok egyike köztük van, mondjuk B és F (2. *c.* ábra), és ehhez az $ACED$ paralelogramma két szomszédos csúcsát kell vennünk, ha nem egy síkban levő pontnégyest akarunk kiválasztani. Az így kapott háromoldalú gúla térfogata a kettős gúla térfogatának negyedrésze.

2. Keressünk most a követelményeket kielégítő olyan poliédereket, amelyeknek van háromnál több oldalú határlapja. Legyen A, B, C egy ilyen lap három egymás utáni csúcsa. Egy a síkjukban fekvő további csúcsnak rajta kell lennie az A-n átmenő, BC-vel párhuzamos egyenesen, mert egyrészt a határlap konvex, így csúcsai BC-nek azon az oldalán vannak, amelyiken A, másrészt A-val egyenlő távolságra is vannak BC-től, mert különben volna két különböző területű háromszög az ABC síkban, és ezek egy a síkon kívül fekvő csúccsal különböző térfogatú gúlákat határoznának meg. Ugyanígy adódik, hogy a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesen is rajta kell lennie minden további csúcsnak (3. *b.* ábra), tehát csak ezek D metszéspontja lehet még csúcsa a határlapnak, és erre az ACD háromszög területe is egyenlő az ABC-ével. Meggondolásunk azt is mutatja, hogy egy a feladat követelményeinek megfelelő poliéder minden határlapja vagy háromszög, vagy paralelogramma.



3. ábra

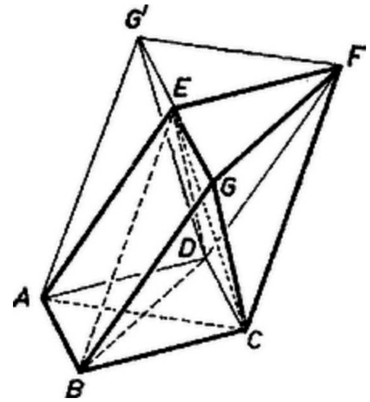
Legyen az AB élen átmenő, $ABCD$-től különböző határlap egy további csúcsa E. Az $ABCDE$ paralelogramma-alapú gúla (3. *a.* ábra) megfelel a feladat követelményeinek, mert belőle háromoldalú gúla csak az alaplap valamelyik csúcsának elhagyásával keletkezik, és ezeknek a térfogata mindig a négyoldalú gúla térfogatának a fele.

Ha a testnek 5-nél több csúcsa van, akkor hasonlóan okoskodhatunk tovább, mint a csak háromszögekkel határolt poliéderek esetében. A további csúcsok csak az E-n[1] átmenő, az ABC síkkal párhuzamos S síkban lehetnek; továbbá ahhoz, hogy az $ABCD$ lap valamelyik három csúcsával alkotott gúlák egyenlő térfogatúak legyenek, benne kell lenniük a CD élen átmenő, az ABE síkkal párhuzamos síkban, vagy lehetnek az ABE síkban. Ezek a síkok S-ből két az AB-vel párhuzamos egyenest metszenek ki (a 3. *b.* ábra folytonos vonallal kihúzott egyenesei). Az A, D, E, a B, D, E és az A, C, E csúcsokat tartalmazó csúcsnégyeseket is figyelembe véve három egyeneshármas adódik, – az előző meggondolás e_0, e_1, e_2 és f_0, f_1, f_2 egyeneseinek megfelelően, melyek rendre AD-vel, BD-vel, ill. AC-vel párhuzamosak (a 3. *b.* ábra hosszú szaggatott vonallal, apró szaggatott vonallal, ill. pontozva jelölt egyenesei). A további esetleges csúcsoknak mindegyik egyeneshármas valamelyik egyenesén rajta kell lennie.

Így azok a pontok jönnek tekintetbe poliédercsúcsokként, amelyeken négy különféleképpen jelölt egyenes megy át. Könnyen belátható, hogy ezek az egyenesek az S síkban $ABCD$-vel egybevágó paralelogrammákat, ezek átlóit és egyes csúcsokon átmenő, átlókkal párhuzamos egyeneseket alkotnak. Három olyan pont keletkezik, amelyiken mind a négy féle egyenesből megy át egy-egy; kettőbe E-ből az AB éllel párhuzamos, egyenlő hosszú, és egyező, ill. ellentétes irányú szakasz vezet, egybe pedig AD-vel párhuzamos, egyenlő hosszú és egyirányú szakasz. Az első két pontból csak az egyik tartozhatik a poliéderhez. Ha a poliéderen a három pont közül csak az egyik lesz csúcs, akkor háromoldalú hasábot kapunk (3. *c.* ábra), és minden háromoldalú hasáb megfelel a feladat követelményeinek. Ha ugyanis kiválasztunk négy csúcsot, akkor a paralelogramma lapok három közös éle közül valamelyiknek mind a két végpontja ki van választva, minden további csúcs ezek valamelyikével valamelyik paralelogramma-lapon szomszédos, tehát mindig ki van választva valamelyik paralelogramma-lap három csúcsa, és ha a négy csúcs nincs egy síkban, akkor a negyedik csúcs

[1] A 3. *b* ábrán F javítandó E-re.

a paralelogrammához nem tartozó él egyik végpontja. Minden ilyen háromoldalú gúla térfogata a hasáb térfogatának harmadrésze.



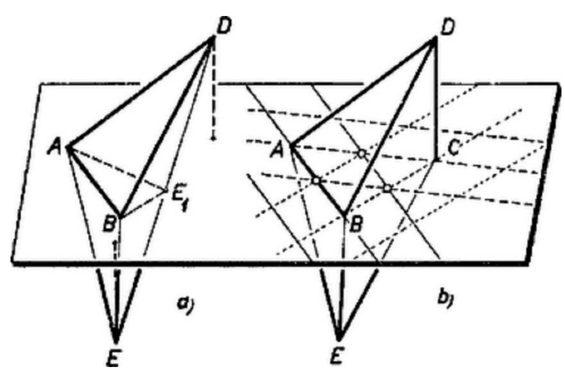
4. ábra

Megmutatjuk végül, hogy a három pont közül nem lehet kettő egyszerre csúcsa a poliédernek. Ha ugyanis az E-től AD irányban levő F pont is, az AB irányban levő G pont is csúcsa a poliédernek (4. ábra), akkor a CFG síkkal párhuzamos síkban vannak az E, B, D csúcsok (a két csúcshármas alkotta háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak), A pedig nincs egyik síkban sem, tehát pl. az $ACFG$ és $BCFG$ gúlák különböző térfogatúak. Ha G helyett az E-re vonatkozó G' tükörképe csúcsa a poliédernek, akkor az AD és BC él szerepe cserélődik meg, a DFG' és EAC síkok párhuzamosak, és B nincs egyikben sem. Így pl. a $BDFG'$ és $ADFG'$ gúlák térfogata különböző.

A feladat követelményeinek tehát a paralelogramma-alapú gúlák, a négyoldalú kettős gúlák és a háromoldalú hasábok felelnek meg, ide számíthatók továbbá a háromoldalú gúlák.

II. megoldás. 1. Keressük sorra a követelményeket kielégítő 4-, 5-, 6- stb. csúcsú poliédereket. Egy négy csúcsú poliéder csak háromoldalú gúla lehet és az megfelelőnek tekinthető.

2. Legyen $ABCDE$ egy a követelményeknek megfelelő öt csúcsú poliéder, és A, B, C, D ennek négy nem egy síkban levő csúcsa. A konvexség miatt E nem lehet az $ABCD$ gúla belsejében vagy határán, így valamelyik három csúcsán átmenő síknak ellenkező oldalán van, mint a gúla negyedik csúcsa; legyen ez az ABC sík. A DE szakasz ABC síkkal való E_1 metszéspontja felezi a DE szakaszt, mert az $ABCD$ és $ABCE$ gúla térfogata egyenlő, így E ugyanakkora távolságra van az ABC síktól, mint D (5. *a.* ábra).



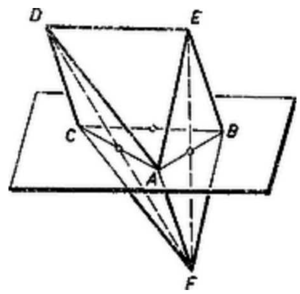
5. ábra

Vagy benne van E az ABD síkban, vagy az $ABDE$ és $ABCD$ gúlák térfogata egyenlő. Utóbbi esetben bontsuk $ABDE$-t az ABE_1D és ABE_1E gúlákra. Ezeknek a közös lapjukra bocsátott magassága egyenlő, és egyenlő az $ABCD$ gúla D-ből húzott testmagasságával. Így az ABE_1 háromszög területe fele akkora, mint az ABC háromszögé. E_1 tehát vagy az AB oldalon van, vagy azoknak az AB-vel párhuzamos egyeneseknek az egyikén, amelyek fele akkora távolságra vannak tőle, mint a C csúcs (5. *b.* ábra). Hasonlóan rajta kell lennie E_1-nek a BC oldalon, vagy annak a két vele párhuzamos egyenesnek az egyikén, amelyek BC-től félakkora távolságra vannak, mint az A csúcs; ugyancsak teljesülnie kell az AC oldalra vonatkozó megfelelő feltételnek is. Mindhárom oldallal párhuzamos egyenes csak az AB, BC, CA oldalak felezőpontjain megy át. Ezek bármelyikére is tükrözzük D-t, paralelogramma-alapú gúlát kapunk, és az E pont keresése közben már biztosítottuk, hogy az ebből kiválasztható bármelyik háromoldalú gúlának ugyanakkora legyen a térfogata.

3. Ha kiválasztjuk egy hat csúcsú, a követelményeknek megfelelő poliéder öt nem egy síkban levő csúcsát, ezek is a követelményeknek megfelelő poliédert határoznak meg, mert minden a csúcsai közül kiválasztható pontnégyes az eredeti poliéder csúcsai közül is kiválasztható, tehát bármely négy csúcs, ha nincs egy síkban, ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg.

Eszerint, ha az $ABCDEF$ poliéder teljesíti a követelményeket, akkor az itt nem egy síkban levő csúcs meghatározta: $ABCDE$ poliéder is, tehát, mint éppen láttuk, paralelogramma-alapú gúlának kell lennie. Az F csúcs vagy a gúla valamelyik háromszöglapjának, vagy a paralelogramma-lapnak ellenkező oldalán van, mint a többi csúcs.

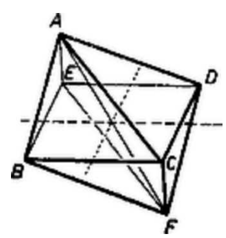
Legyen $BCDE$ a paralelogramma-lap, és F az ABC lap ellenkező oldalán, mint a gúla. Az öt csúcsú testnél követett meggondolást egyrészt az $ABCD$ gúlára és az F csúcsra, másrészt az $ABCE$ gúlára és az F csúcsra alkalmazva azt nyerjük, hogy F a D csúcsból is, és E-ből is az AB, BC, CA élek egyikének a felezőpontjára való tükrözéssel áll elő. A hat tükörkép közül csak E-nek AB felezőpontjára és D-nek AC felezőpontjára vonatkozó tükörképe esik egybe, ez lehet tehát csak az F csúcs. Ez a $AEDCFB$ háromoldalú hasáb (6. ábra).



6. ábra

A háromoldalú hasáb valóban ki is elégíti a követelményeket. Ezt tudjuk már az $ABCDE$ gúlára és az $FBCDE$ négyoldalú gúlából kiválasztható háromoldalú gúlák térfogata ugyanakkora, mint az $ABCDE$-ből kiválaszthatóké, mert a két négyoldalú gúla egyenlő térfogatú, ugyanis A és F távolsága a $BCDE$ paralelogramma síkjától ugyanakkora. Végül az F pont választása szerint az $ADCFB$, ill. az $AEBFC$ poliéderből kiválasztható háromoldalú gúlák is egyenlő térfogatúak, és térfogatuk egyenlő az $ABCD$, ill. az $ABCE$ gúla térfogatával, amik az $ABCDE$ gúlának is részei. Így az összes kiválasztható háromoldalú gúlák egyenlő térfogatúak.

4. Keressük most az olyan $ABCDEF$ poliédereket, amelyekben F az $ABCDE$ gúla $BCDE$ paralelogramma-lapjának van ellenkező oldalán, mint a gúla. Ezekre az AF szakasznak a $BCDE$ síkba eső F_1 felezőpontja az előzőkhöz hasonlóan vagy a BC egyenesen van, vagy attól félakkora távolságra, mint a DE egyenes; de ugyanakkor F_1 vagy rajta van DE-n, vagy félakkora távolságra van tőle, mint BC. A két feltételt egyszerre a paralelogramma BC-vel párhuzamos középvonalának pontjai elégítik ki (7. ábra).



7. ábra

Ugyanígy rajta kell lennie F_1-nek a CD-vel párhuzamos középvonalon is: Így F_1 a paralelogramma középpontja, F az A csúcs erre vonatkozó tükörképe, a poliéder kettős paralelogramma-alapú gúla.

Ez a test valóban kielégíti a feladat követelményeit, mert az $ABCDE$ gúlára ezt már tudjuk, F megkeresése pedig biztosította, hogy a kiválasztható, F-et és A-t tartalmazó háromoldalú gúlák térfogata egyenlő pl. $ABCD$-ével, továbbá ekkora az $FBCDE$ poliéderből kiválasztható háromoldalú gúlák térfogata is, hiszen ez a poliéder az $ABCDE$ poliéder tükörképe. Végül A-t is, F-et is elhagyva, egy síkban levő négy pont marad.

5. Megmutatjuk, hogy hatnál több csúcsú test nem elégíti ki a követelményeket. Ha kielégítené, akkor minden 7 csúcsú rész-teste is kielégítené a követelményeket. Egy ilyen 7 csúcsú testből 6 nem egy síkban levő csúcs az előzőek szerint vagy háromoldalú hasábot, vagy négyoldalú kettős gúlát határoz meg. Utóbbi esetben a hetedik G csúcs a test egy L lapjának ellenkező oldalán van, mint maga a test. De a kettős gúlának határlapja L-nek a test középpontjára vonatkozó L' tükörképe is, ami párhuzamos L-lel. Ekkor azonban két különböző térfogatú háromoldalú gúlát kapunk, ha L'-höz egyszer G-t, egyszer pedig L-nek valamelyik csúcsát vesszük.

Ha 6 csúcsot kiválasztva ezek háromoldalú hasábot határoznak meg, akkor a hetedik G csúcs ismét valamelyik határlapnak ellenkező oldalán van, mint a hasáb többi csúcsa. Az utolsó meggondolás mintájára látható, hogy G nem lehet az egyik háromszöglap ellenkező oldalán, mint a hasáb. Ha viszont G egy paralelogramma-lapnak van ellenkező oldalán, mint a hasáb, akkor a 4. pont meggondolását a paralelogramma és a további két csúcs egyike, ill. a másika alkotta gúlára alkalmazva azt kapjuk, hogy G mindkét csúcsnak tükörképe kellene hogy legyen a paralelogramma középpontjára, ez a két tükörkép azonban különböző. Így hasábhoz sem található hetedik csúcs.

Azt nyertük tehát, hogy a feladat követelményeinek a paralelogramma-alapú gúlák, a négyoldalú kettős gúlák, és a háromoldalú hasábok felelnek meg, amikhez még hozzávehetjük a háromoldalú gúlákat is, más poliédert nem.

Surányi János