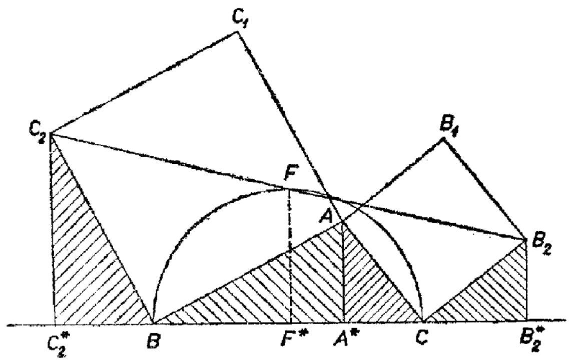
1. feladat. *Az ABC háromszög AB és AC oldalai fölé (kifelé) az AC_1C_2B és AB_1B_2C négyzeteket rajzoljuk. Bizonyítandó, hogy a B_2C_2 szakasz felezőpontja a BC átmérőjű körön fekszik:*

I. megoldás. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor B_2 és C_2 a BC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, vagyis amikor a háromszög B-nél és C-nél levő szöge hegyesszög.

Vetítsük az A, B_2, C_2 pontokat és a C_2B_2 szakasz F felezőpontját a BC egyenesre, legyenek vetületeik rendre A^*, B_2^*, C_2^* és F^* (1. ábra). Minthogy a négyzeteket kifelé szerkesztettük, B_2^* ill. C_2^* a BC szakasz C-n, ill. B-n túli meghosszabbításán van.



1. ábra

A $C_2C_2^*B$ és BA^*A derékszögű háromszögek egybevágók, mert $C_2B = BA$, és $C_2^*C_2B\sphericalangle = A^*BA\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Hasonlóan az AA^*C és $CB_2^*B_2$ derékszögű háromszögek is egybevágók. Ezekből következik, hogy a $C_2C_2^*B_2^*B_2$ trapéz két párhuzamos oldalának összege

$$C_2C_2^* + B_2B_2^* = BA^* + A^*C = BC,$$

és így a trapéz középvonalának hossza

$$FF^* = \frac{BC}{2},$$

továbbá ez a középvonal merőleges BC-re. Ez azt jelenti, hogy F a BC egyenes F^* pontjától és egyszersmind magától az egyenestől is $BC/2$ távolságra van.

Bebizonyítjuk még, hogy F^* a BC szakasz felezőpontja. Ezekből már következik, hogy F rajta van a BC fölé, mint átmérő fölé rajzolt körön, mégpedig a BC-re merőleges átmérő egyik végpontja F.

F^* egyrészt felezi a $C_2^*B_2^*$ szakaszt, másrészt az F^*C szakasz ugyanannyival kisebb $F^*B_2^*$-nál, mint BF^* a $C_2^*F^*$-nál, tudniillik – a fenti egybevágóságok szerint – AA^*-gal. Így F^* valóban felezi a BC szakaszt. Ezzel a bizonyítást – a tett megszorító feltétel teljesülése esetére – befejeztük.

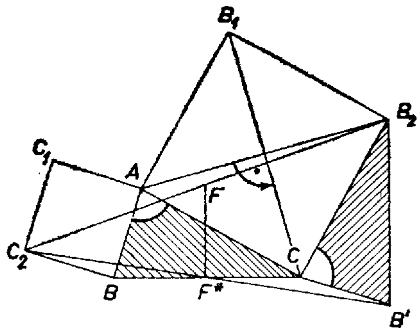
Ha az ABC háromszögben a B-nél és C-nél levő szögek valamelyike, mondjuk a C-nél levő, derékszög, akkor egyszerűbb helyzettel állunk szemben, mert B_2 a BC egyenesen adódik, és a $C_2C_2^*B_2^*B_2$ trapéz szerepét a $C_2C_2^*B_2$ derékszögű háromszög veszi át; a bizonyítás ennek megfelelő, kézenfekvő egyszerűsítésekkel ebben az esetben is alkalmazható.

Ha pedig, mondjuk C-nél, tompaszög van, akkor a B_2C_2 és $B_2^*C_2^*$ szakaszok metszik egymást, a $C_2C_2^*B_2B_2^*$ trapéz átlói lesznek (2. ábra), FF^* az ezek felezőpontjait összekötő szakasz. Ez – mint könnyen bebizonyítható – minden konvex trapézban egyenlő a párhuzamos oldalak különbségének felével, az utóbbiról pedig a hegyesszögű esetben alkalmazott gondolatmenettel belátható, hogy egyenlő a BC szakasznak a felével. Ezek szerint az állítás minden háromszögre érvényes.

2. ábra

Megjegyzés. A fenti megoldáshoz hasonló gondolatmenettel – alkalmas koordinátarendszert választva – egyszerű analitikus geometriai megoldás is adható.

II. megoldás. Forgassuk el az ABC háromszöget az ACB_2B_1 négyzet középpontja körül 90°-kal úgy, hogy A a C-be kerüljön. Így C a B_2-be kerül, B elforgatott helyzete pedig legyen B' (3. ábra). Ekkor $B'C$ merőleges BA-ra és egyenlő vele, tehát párhuzamos, egyenlő és egyező irányítású BC_2-vel. Így B, C_2, C, B' ebben a sorrendben paralelogrammát határoznak meg, tehát a BC átló F^* felezőpontja a C_2B' átlót is felezi.



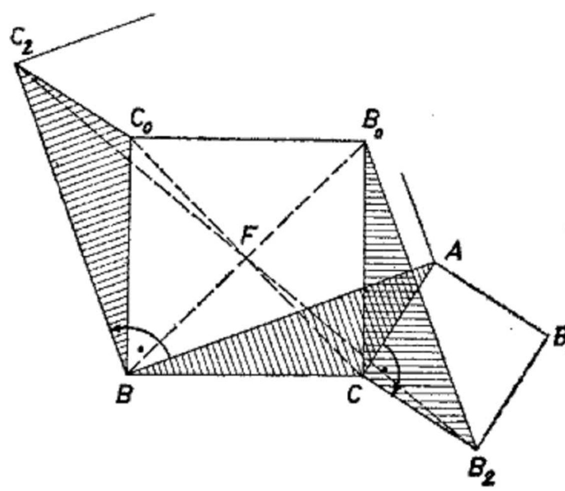
3. ábra

A végzett forgatás folytán $B'B_2$ merőleges BC-re és egyenlő vele. Most már az FF^* szakasz a C_2B_2B' háromszög középvonala, tehát egyenlő a $B'B_2$ és BC szakaszok felével. Ezek szerint B, C és F egyenlő távolságra vannak F^*-tól, ez pedig azt jelenti, hogy F a BC átmérő fölé rajzolt körön van.

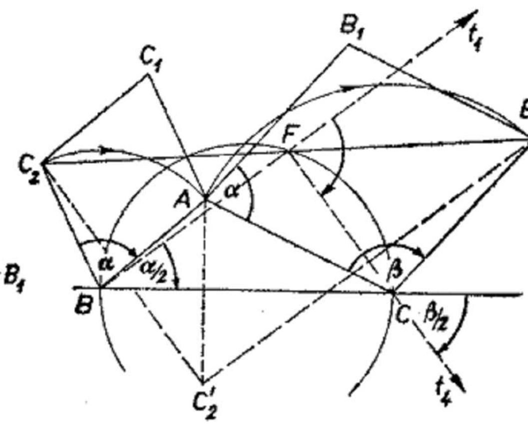
Ez a bizonyítás tetszés szerinti alakú ABC háromszög esetén érvényes.

III. megoldás. Forgassuk el az ABC háromszöget előbb B körül $90°$-kal úgy, hogy A a C_2-be jusson, majd C körül $90°$-kal úgy, hogy A a B_2-be jusson, legyen az első esetben C új helyzete C_0, a második esetben B új helyzete B_0 (4. ábra). A két forgatás ellentétes irányú, a négyzetek kifelé való szerkesztése miatt. A két forgatási szög összege $180°$, ezért BC_2 és B_0B_2 párhuzamosak és ellentétes irányúak. Továbbá egyenlőek is, és ezért a $BC_2B_0B_2$ négyszög paralelogramma. Így a C_2B_2 átló kérdéses F felezőpontja a BB_0 átlót is felezi.

Másrészt a forgatásokból következik, hogy a BC_0B_0C négyszög négyzet, tehát az átlók közös F felezőpontjából az oldalak derékszögben látszanak, így F a BC oldal, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön van, éppen a BC-re merőleges átmérő egyik végpontja.



4. ábra



5. ábra

IV. megoldás. A C_2 pontot átvihetjük B_2-be úgy, hogy elforgatjuk először B körül $\alpha = 90°$-kal, – így A-ba kerül –, majd A-t elforgatjuk C körül ugyanabban az irányban $\beta = 90°$-kal (5. ábra).

Ismeretes, hogy egy (síkbeli) forgatás helyettesíthető bármely két olyan egymás utáni tükrözéssel, amelyek tengelye átmegy a forgatás középpontján, és az első tengelyt a második tengelybe átvivő forgatás fele akkora szögű, mint az eredeti forgatás, és azzal megegyező irányú.

Helyettesítsük a mondott forgatásokat két-két tükrözéssel úgy, hogy ezek t_1, t_2 és t_3, t_4 tengelypárja közül t_2 és t_3 azonos legyen. Így ugyanis a harmadik tükrözés visszaállítja a második tükrözés előtti helyzetet, és a négy tükrözés kettőre csökkenthető. Mivel t_2 nek B-n, t_3-nak C-n kell átmennie, így mindkettőnek egyaránt a BC egyenest kell választanunk. Ilyen választás mellett C_2-t a B-n áthaladó és BC-vel $\alpha/2$ szöget bezáró t_1, majd a C-n átmenő és BC-vel $\beta/2$ szöget bezáró t_4 tengelyen való tükrözés viszi át B_2-be.

Ez a két tükrözés – az idézett tétel megfordítása alapján – helyettesíthető egyetlen forgatással, amelynek középpontja a t_1 és t_4 metszéspontja, szöge kétszer akkora, mint a t_1-et t_4-be átvivő forgatás, és iránya megegyezik az utóbbi forgatás irányával. A két tengely szöge (mint a t_1, t_2 és t_4 határolta háromszög külső szöge)

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°, \tag{1}$$

így C_2-t a B_2-be $180°$-os forgatás viszi át, vagyis a tengelyek metszéspontja éppen a B_2C_2 szakasz F felezőpontja.

Mivel pedig az F pontból a BC szakasz $90°$-os szögben látszik, azért F rajta van a BC átmérőjű Thales-körön, ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A bizonyításban α-ról és β-ról csak azt használtuk fel (1)-ben, hogy összegük $180°$. A feladat állítása tehát helyes marad akkor is, ha a háromszög AB és AC oldalára kifelé olyan rombuszokat rajzolunk, melyeknek B-nél, ill. A-nál levő szöge egyenlő; továbbá akkor is, ha mindkét oldalra befelé rajzoljuk a rombuszokat. Az általánosított állítás bizonyítható – értelemszerű módosításokkal a II. és III. megoldás gondolatmenetével is.

2. feladat. *Mennyi a $K = 5x - 6y + 7z$ kifejezés legkisebb és mennyi a legnagyobb értéke, ha x, y és z olyan nem negatív számok, melyekre fennáll*

$$4x + y + 2z = 4 \tag{2}$$

és

$$3x + 6y - 2z = 6\ ? \tag{3}$$

I. megoldás. Fejezzük ki a három paramétertől függő K kifejezést egyetlen paraméterrel, pl. x-szel. A feltételi egyenletekből összeadással és rendezéssel

$$y = \frac{10}{7} - x, \tag{4}$$

és ezt felhasználva pl. (2)-ből

$$z = \frac{9}{7} - \frac{3}{2}x. \tag{5}$$

A feltétel alapján x nem lehet negatív, a 0 értéket azonban már felveheti, mert $x = 0$ esetén (4) és (5) szerint y és z pozitívok, x minimális értéke tehát 0. Másrészt abból, hogy y és z nem negatív, x-re (4) és (5) alapján

$$x \leq \frac{10}{7}, \quad \text{illetve} \quad x \leq \frac{6}{7}$$

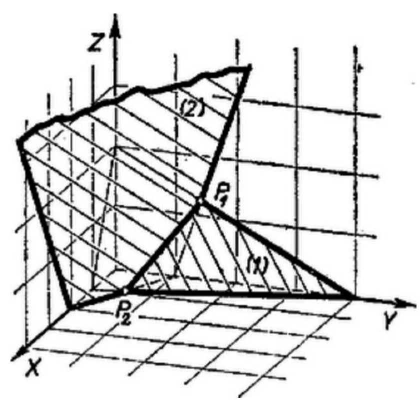
adódik, tehát x maximális értéke $\frac{6}{7}$.

(4) és (5) felhasználásával

$$K = 5x - 6y + 7z = \frac{x}{2} + \frac{3}{7},$$

ennek értéke x növekedésével nő, tehát legkisebb és legnagyobb értéke – az x minimális és maximális értékét behelyettesítve –

$$K_{\min} = \frac{3}{7}, \quad \text{illetve} \quad K_{\max} = \frac{6}{7}.$$



6. ábra

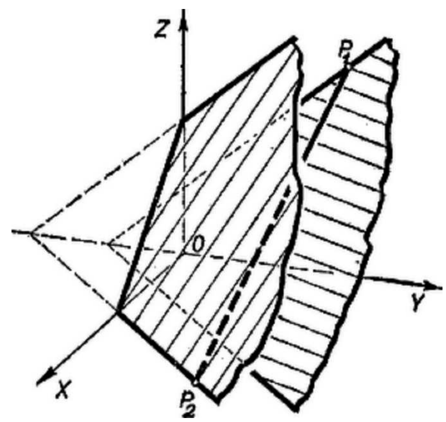
II. megoldás. Szemléltessük a feladatban szereplő háromváltozós kifejezéseket egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. (A térbeli koordináta geometria bizonyos elemeinek ismeretét ebben a megoldásban feltételezzük.)

A (2) és (3) egyenletek egy-egy síkot határoznak meg a térben (6. ábra). A mind a két egyenletet kielégítő számhármasok az e két sík metszésvonalán elhelyezkedő pontok koordinátái. Az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ további feltételek miatt ennek a metszésvonalnak csak az első térnyolcadba (és annak határára) eső része jön szóba, ez pedig a $P_1(0,\ 10/7,\ 9/7)$ ponttól a $P_2(6/7,\ 4/7,\ 0)$ pontig terjed.

Az $5x - 6y + 7z = K$ egyenlet minden adott K értékre egy-egy síkot határoz meg, amely az X-, Y-, Z- tengelyből rendre

$$a = K/5, \quad b = -K/6, \quad c = K/7$$

hosszúságú szakaszt metsz le. Ezek egyenes arányban vannak K-val, tehát a különböző K értékekhez tartozó síkoknak a koordináta-síkokba eső metszésvonalai párhuzamosak, így maguk a síkok is párhuzamosak.



7. ábra

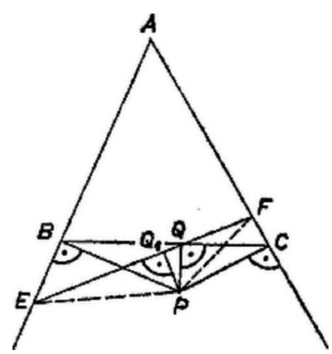
Ábrázoljuk a párhuzamos síksereg P_1-en, illetve P_2-n átmenő egyedét (7. ábra). K értéke P_1-ben $3/7$, P_2-ben $6/7$, különbözők, így P_1-en és P_2-n a síksereg két különböző egyede halad át, a tengelymetszetek

$a_1 = 3/35,$	$b_1 = -3/42,$	$c_1 = 3/49,$	illetve
$a_2 = 6/35,$	$b_2 = -6/42,$	$c_2 = 6/49.$	

A P_1P_2 szakasz minden egyes belső pontján a párhuzamos síkseregnek egy és csak egy – a két megrajzolt sík közti – egyede megy át. A tengelymetszetekből megállapítható, hogy P_1-től P_2 felé haladva K értéke növekszik, tehát a fenti K_1 a legkisebb, K_2 a legnagyobb érték.

3. feladat. *Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsában az AB, illetőleg AC oldalra emelt merőlegesek metszéspontja P. P-nek a BC szakaszon levő (merőleges) vetülete Q. Bizonyítandó, hogy a Q ponton átmenő, BC-től különböző egyeneseknek a BAC szög szárai közé eső szakasza nagyobb BC-nél.*

I. megoldás. Legyen egy a Q ponton áthaladó, a BC-től különböző egyenesnek az AB szárral való metszéspontja E, AC-vel való metszéspontja F (8. ábra). A P-ből az EF-re húzott merőleges talppontja legyen Q_1.



8. ábra

Hasonlítsuk össze (Pythagoras tétele alapján) a BQ és EQ_1, továbbá a QC és Q_1F szakaszokat. A BPQ és EPQ_1 derékszögű háromszögekből

$$BQ = \sqrt{BP^2 - PQ^2}, \qquad EQ_1 = \sqrt{EP^2 - PQ_1^2}.$$

A PQQ_1 és PEB derékszögű háromszögekből nyilvánvalóan

$$PQ > PQ_1 \tag{6}$$

$$\text{és}\quad EP > BP. \tag{7}$$

Ezek szerint BQ kifejezésében a kisebbítendő kisebb, a kivonandó pedig nagyobb, mint EQ_1 kifejezésében, tehát

$$BQ < EQ_1. \tag{8}$$

Ugyanígy a PFC derékszögű háromszögből adódó

$$PF > PC \tag{9}$$

felhasználásával a CPQ, FPQ_1 és PQQ_1 derékszögű háromszögekből

$$QC = \sqrt{PC^2 - PQ^2} < \sqrt{PF^2 - PQ^2} < \sqrt{PF^2 - PQ_1^2} = Q_1F. \tag{10}$$

Megmutatjuk még, hogy Q a BC szakaszon, Q_1 az EF szakaszon van. Ekkor (8)-at és (10)-et összeadva következik a bizonyítandó egyenlőtlenség:

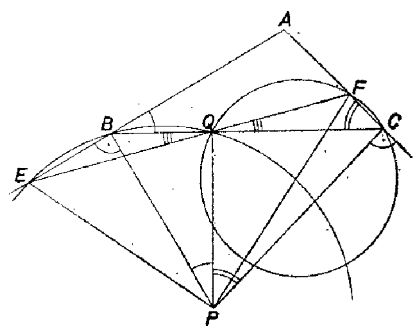
$$BC = BQ + QC < EQ_1 + Q_1F = EF. \tag{11}$$

A Q és Q_1 helyzetére kimondott állítás így látható be. Az ABC háromszög B-nél és C-nél levő szöge hegyesszög, így az AB-re B-ben és AC-re C-ben állított merőlegeseknek az oldalegyenesektől a háromszöget tartalmazó félsíkba induló félegyenesei BC-vel hegyesszöget zárnak be. Így P ezeknek a félegyeneseknek a metszéspontja, vetülete, Q, a BC szakaszon van, és P a BC egyenes ellenkező oldalán fekszik, mint A.

Ha E az AB oldal B-n túli meghosszabbításán van – amit a továbbiakban mindig felteszünk, mert, ha kell, a betűzés megcserélésével elérhetünk –, akkor E és P a BC egyenes ugyanazon oldalán van, tehát $BEPQ$ konvex négyszög; E-nél levő szöge, mint a BEP derékszögű háromszög egyik szöge, hegyesszög, Q-nál levő szöge pedig derékszög, tehát az EQ átló PE-vel is, PQ-val is hegyesszöget zár be, s így Q_1 az EQ szakasz belső pontja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A feladat állítása érvényes, akármekkora is a háromszög A-nál levő szöge, hiszen csak a B és C csúcsnál levő szögről használtuk fel, hogy hegyesszögek. Világos, hogy érvényes marad akkor is, ha pl. B-nél derékszög van, ekkor ugyanis P és Q egybeesik C-vel. Ha viszont pl. B-nél tompaszög van, akkor a (11) egyenlőtlenség nem következik (8)-ból és (9)-ből, mert az utolsó két bekezdés meggondolásai nem érvényesek, Q a BC szakaszon kívül keletkezik, és valóban EF lehet kisebb is, nagyobb is, mint BC.

II. megoldás. Az I. megoldás (7) és (9) egyenlőtlensége szerint az EPF háromszögben a P-ből induló oldalak nagyobbak, mint a BPC háromszög megfelelő oldalai. Megmutatjuk, hogy egyrészt $EPF\sphericalangle > BPC\sphericalangle$, másrészt hogy ebből, továbbá a BCP és CBP szögek hegyesszög voltából következik, hogy a harmadik oldal is az EPF háromszögben nagyobb.



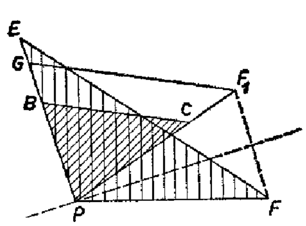
9. ábra

A szögekre kimondott egyenlőtlenség igazolására rajzoljuk meg a B, E, Q, valamint a C, F, Q pontokon áthaladó köröket (9. ábra). P az első kör belsejében van, mert a BQ szakasz P-ből az ABC szöggel egyenlő szög alatt látszik (merőleges szárú hegyesszögek), E-ből pedig ennél kisebb szög alatt. A másik körön viszont kívül fekszik P, mert a QFC ív P-ből vett látószöge akkora, mint az ACB szög, a P-vel egy oldalon levő kiegészítő ív pontjaiból vett látószög pedig nagyobb, mert innen a QF rész-ív látható ekkora szög alatt. Ezek alapján

$$EPB\sphericalangle > EQB\sphericalangle = FQC\sphericalangle > FPC\sphericalangle,$$

és a két szélső szöghöz a BPF szöget hozzáadva valóban

$$EPF\sphericalangle > BPC\sphericalangle. \tag{12}$$



10. ábra

Az EPF és BPC háromszögek EF és BC oldalaira vonatkozó állítás igazolásához úgy forgattuk el a BPC háromszöget P körül, hogy B a PE szakaszra essék (10. ábra), a PC-nél hosszabb PF oldalt pedig P-től rámértük a PC félegyenesre is, a végpont F_1. Húzzunk most BC-vel párhuzamost E és F_1 közül azon a ponton át, amelyik közelebb van BC-hez (a 10. ábrán az F_1 pont az), messe a párhuzamos PE-t G-ben. Mivel $PC < PF = PF_1$, azért nyilvánvalóan

$$BC < GF_1. \tag{13}$$

Ha az ABC háromszög B-nél és C-nél levő szöge hegyesszög, akkor a PBC-vel egyenlő PGF_1 szög is hegyesszög, és így kiegészítő szöge, az EGF_1 szög, tompaszög. Ezért

$$GF_1 < EF_1.$$

Ezt (13)-mal egybevetve

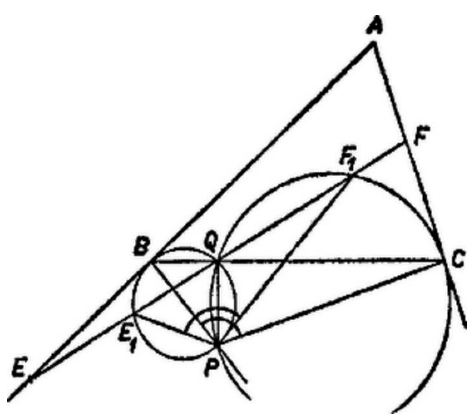
$$BC < EF_1. \tag{14}$$

Mivel az EPF_1 és EPF háromszögek két-két oldala egyenlő, de közbezárt szögük az előbbi háromszögben kisebb, azért[1]

$$EF_1 < EF,$$

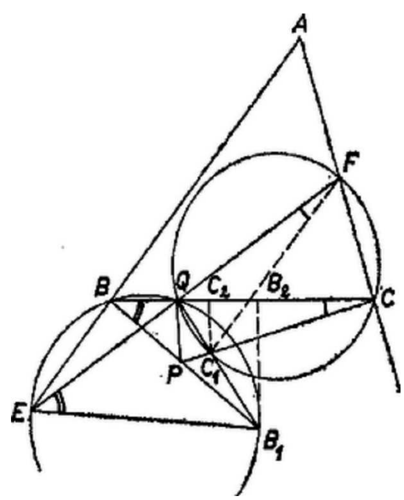
és ezt (14)-gyel egybevetve $BC < EF$; az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés: A (12) egyenlőtlenség a következőképpen is belátható. Rajzoljunk köröket a BP és CP szakaszok, mint átmérők fölé; ezek egymást P-ben és Q-ban metszik. Legyen ezek Q-tól különböző metszéspontja EF-fel E_1, illetőleg F_1 (11. ábra). P-ből az E_1F_1 szakasz ugyanakkora szögben látható, mint a BC szakasz: $E_1PF_1\sphericalangle = BPC\sphericalangle$, mert a BPF_1 szög közös részük, nem közös E_1PB, illetőleg F_1PC részük pedig egyenlő a vele egy íven nyugvó E_1QB, illetőleg $F_1QC = FQC$ szöggel, ha F_1 a QF szakaszon, vagy annak Q végpontjában van, – az utóbbi szögek viszont csúcsszögek. Ha pedig F_1 a QE szakaszon van, akkor az E_1QB szög külső szöge az F_1PCQ húrnégyszögnek, az F_1PC rész-szög pedig belső szög a négyszög Q-val szemben fekvő csúcsánál, tehát a nem közös szög-részek egyenlősége ilyenkor is fennáll.



11. ábra

Az E_1F_1 szakasz része az EF szakasznak, az E_1PF_1 szög része az EPF szögnek, tehát valóban fennáll $EPF\sphericalangle > BPC\sphericalangle$. (Bizonyítani kellene még az E_1, F_1 pontok helyzetéről felhasznált állítást.)



12. ábra

III. megoldás. Állítsunk merőlegest Q-ban EF-re, és messe ez a PC egyenest C_1-ben, PB-t pedig B_1-ben; B_1 és C_1 merőleges vetülete a BC egyenesen legyen B_2, ill. C_2 (12. ábra). E az AB oldal meghosszabbításán van,

[1] Ugyanis az FF_1 szakasz P-n átmenő felező merőlegesének ugyanazon oldalára esik E és F_1.

ezért a merőleges a PQC derékszögű szögtartományban halad, tehát a BCP háromszög PC oldalát és a BP oldal meghosszabbítását metszi, továbbá C_2 a QC szakaszon adódik. Ezért $QC_1 < QB_1$, és egyszersmind

$$QC_2 < QB_2. \tag{15}$$

C és Q rajta van a C_1F átmérő fölötti Thales-körön. A QFC_1 és QCC_1 szögek egyenlők, mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, így a QFC_1 és C_2CC_1 derékszögű háromszögek hasonlók. A két átfogó közül FC_1 a nagyobb, mert a körnek átmérője, tehát a megfelelő befogókra

$$FQ > CC_2. \tag{16}$$

A BC-ből még fennmaradt C_2B szakasz helyett a nála nagyobb B_2B-ről mutatjuk meg, hogy kisebb az EF-ből fennmaradt EQ-nál. (B_2B a BC-nél nagyobb is lehet.) Ehhez a BB_1B_2 és az EB_1Q háromszögeket hasonlítjuk össze. B és Q rajta van az EB_1 átmérő fölé rajzolt Thales-körön, ezért egyrészt

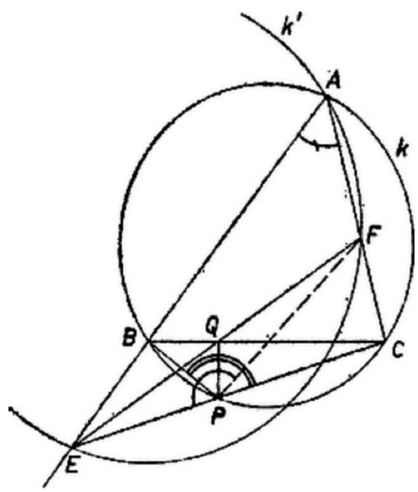
$$EB_1 > BB_1,$$

másrészt a két háromszögben az egy íven nyugvó B_1EQ és B_1BQ kerületi hegyes szögek egyenlők. Így a két háromszög hasonló, és az EB_1Q háromszög oldalai nagyobbak, tehát

$$EQ > BB_2. \tag{17}$$

Most már a (15)–(17) egyenlőtlenségek alapján valóban

$$EF = EQ + QF > BB_2 + C_2C = BQ + QB_2 + C_2C > BQ + QC_2 + C_2C = BC.$$



13. ábra

IV. megoldás. A feladat állítása következik abból is, ha megmutatjuk, hogy az AEF háromszög köré írt k' kör átmérője nagyobb, mint az ABC háromszög köré írt k kör átmérője (13. ábra), hiszen nagyobb körben ugyanakkora kerületi szög – ti. a $BAC = EAF$ szög – nagyobb húr felett nyugszik.

A k kör átmegy P-n is, és AP a kör egy átmérője, mert az $ABPC$ négyszögben a B és C csúcsnál derékszög van. Elég tehát belátnunk, hogy P a k' kör belsejében van, hiszen ekkor k'-nek van k átmérőjénél nagyobb húrja, ezért k' átmérője nagyobb, mint k átmérője. P valóban k belsejében van, mert (8) alapján

$$EFP\sphericalangle > BPC\sphericalangle = 180^\circ - BAC\sphericalangle = 180^\circ - EAF\sphericalangle,$$

és az EF szakasz a k' kör (A-t nem tartalmazó) EF ívének pontjaiból látszik $180^\circ - EAF$ szög alatt. Ennél nagyobb szög alatt az EF szakaszt csak a k' kör belső pontjaiból lehet látni. Ezt akartuk bizonyítani.

Scharnitzky Viktor, Lukács Ottó