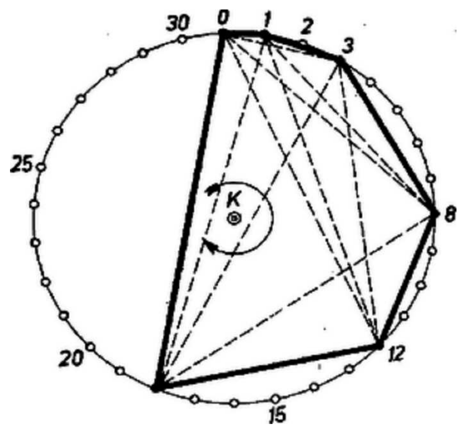
(2., befejező közlemény)

6. Egyelőre tegyük félre eddigi témánkat – később visszatérünk rá – s fogjunk hozzá a következő, kombinatorikai kérdéskör tárgyalásához.

Tekintsük az $N = n^2 + n + 1$ oldalú szabályos sokszög, Σ csúcspontjainak a halmazát. Ennek elemei kettenként egyenes szakaszokat feszítenek ki; a szakaszok száma nyilvánvalóan $N(N-1)/2$. E szakaszok hosszúsága csak $(N-1)/2$-féle – az egy csúcsból kiágazó ilyen szakaszok kettenként szimmetrikusan helyezkednek el, vagyis kettenként egyenlők; és minden egyes hosszúsághoz N különböző szakasz tartozik – a szakaszok bármelyikét a K középpont körül, $\omega = 2\pi/N$ szöggel egymás után N-szer elfordítjuk, ily módon az N számú, egyenlő hosszú szakaszt mindegyik helyzetben megkapjuk. Ragadjunk ki a Σ csúcsai közül l számút, vagyis az N-elemű ponthalmaz egy l-elemű részhalmazát. Ez az 1 pont kettesével $L = l(l-1)/2$ szakaszt feszít ki. Hogyha $l > n + 1$, az L számú szakasz közt előfordul két egyenlő hosszúságú, hiszen a Σ által létesített szakaszok hosszúságai csak $(N-1)/2$-félék, és $l > n+1$ esetén $L > (N-1)/2$. Ha azonban $l = n+1$, akkor előfordulhat, hogy a szóban forgó, l-elemű részhalmaz kifeszítette L számú húr mindegyike más–más hosszúságú.



3. ábra

A 3. ábra példát mutat erre nézve, mégpedig az $5^2 + 5 + 1 = 31$ oldalú Σ esetét. A kiválasztott $5 + 1 = 6$ elemű részhalmaz: a $\{0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 12,\ 18\}$ ponthalmaz. Elnevezhetnénk a *Σ ponthalmaz teljesen szabálytalan maximális részhalmazának*. Egy ily módon definiált részhalmazt – a rövidség kedvéért – egy a Σ-hoz tartozó Π-halmaznak mondunk a következőkben. Az n nem minden értéke esetében van a Σ halmaznak Π–részhalmaza. Ha pl. $n = 6$, akkor bármiképpen választunk is ki a 43–oldalú szabályos sokszög – a Σ sokszög – csúcsai közül 7-et, e 7 pont kifeszítette szakaszok közt mindig van (legalább) két egyező hosszúságú, vagyis a kiválasztott részhalmaz a „teljesen szabálytalan” követelménynek nem tesz eleget. (Erről az olvasó meggyőződhet, pl a 817. gyakorlat megoldásában alkalmazott módszerrel; az út hosszadalmas, kívánatos volna minél egyszerűbb megoldást keresni.) A Π elemei által mint csúcsai által kifeszített $(n+1)$-oldalú konvex sokszöget a Σ sokszög egy *Π–sokszögének* mondjuk.

A kutatások során igyekeztek megállapítani, hogy az n mely értékei esetében van Σ-nak Π-részsokszöge, s mely értékek esetében nincs. Ez az általános kérdés azzal az elemi módszerrel, amellyel a mi feladat–megoldóink az $n = 3$ esetet tisztázták (817. gyakorlat), reménytelennek látszik. Valójában súlyos eszközöket használtak fel, mégsem oldották meg az egész problémát. Azt 1938-ban sikerült bebizonyítani, hogy minden $n = p^\alpha$ *szám esetében (ahol p prímszám és $\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) van a Σ-nak Π-részsokszöge.*

A következőkben a Σ–halmaz bizonyos Π-részhalmazainak halmazával foglalkozunk.

7. Járjuk körül a szabályos N-szöget, a Σ-t, és mint az óraszámlapot, számozzuk meg a szögpontokat $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $(N-1)$-gyel. Így kiragadva a

$$k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$$

számokat – ahol is legyen $0 \leqq k_0$ és $k_n \leqq N-1$ –, a Σ-nak egy részsokszögét, vagyis mint ponthalmaznak egy $\{k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_{n-1}\}$ részhalmazát jelöltük ki. Legyen ez most a Σ-nak egy Π-részhalmaza, mégpedig ama Π sokszöggel megadva, melynek 0 és 1 szomszédos csúcsai és a $\overline{01}$ oldallal szomszédos két oldal közül a rövidebbik álljon a forgásirány felé. Ilyen a 3. ábra kiemelt hatszöge (ahol is $n = 5$).

Most forgassuk el a K középpont körül a Π_0 sokszöget a kijelölt irányban rendre ω, 2ω, $\ldots$, $(N-1)\omega$ szöggel – ahol $\omega = 2\pi/N$ –, akkor a kezdő sokszöggel együtt a

$$\Pi_0,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_{N-1}$$

sokszögsorozatot kapjuk. Mondhatjuk, hogy ezek a sokszögek, mint elemek, egy újabb, N-elemű halmazt alkotnak; nevezzük ezt a halmazt Ω-nak. A következőkben a Σ, Ω halmazok további kapcsolatait fogjuk kideríteni

I. TÉTEL: *Az Ω halmaznak egy és csakis egy eleme tartalmazza a Σ két adott elemét.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a Σ két adott csúcsához írt szám a k és $k+l$. E két pont K pontból $l\omega$ szögben látszik. A Π_0 csúcsaiból alkotott pontpárok K pontbeli látószögei közt az ω, 2ω, ..., $q\omega$ szögek ($q = (N-1)/2$) mindegyike fellép, mégpedig mindegyik pontosan egyszer, ami a Π–sokszög definiciójából következik. Tekintsük most Π_0-nak azt a csúcspontpárját, amelynek a látószöge éppen $l\omega$. Ezt a pontpárt az előírt irányú,

$$0,\ \omega,\ 2\omega,\ \ldots,\ (N-1)\omega$$

szögű forgások közül egyik, de csak az egyik – mondjuk a $j\omega$ szögű – átviszi a k, $k+l$ kijelölt pontpárba. Ennélfogva az Ω-nak egy és csak egy eleme, a Π_j sokszög, tartalmazza mint csúcsokat a két adott pontot.

Az így talált Π_j-t a k és $k+l$ pontok *összekötő sokszögének* mondhatnánk.

II. TÉTEL: *Az Ω bármely két elemének egy és csak egy közös csúcsa van, ami nyilvánvalóan a Σ-nak egy eleme.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a mondott két elem a Π_k és Π_{k+l} sokszög. A K középpont körül a kijelölt irányba $l\omega$ szöggel elfordítva a Π_k-t, átmegy a Π_{k+l}-be. Minthogy Π_k-nak van egyetlenegy olyan csúcspontpárja, melynek K pontbeli látószöge éppen $l\omega$, mondhatjuk, hogy ezt a párt a q és $q+l$ pontok alkotják. Ámde az $l\omega$ szögű forgás q-t átviszi $(q+l)$-be, a Π_{k+l} egy csúcsába. Eszerint a $q+l$ pont a Π_k és Π_{k+l} közös csúcsa. Több közös csúcs pedig az I. tétel szerint nem lehet.

Az így talált, $q+l$ által megnevezett csúcsot a Π_k, Π_{k+l} sokszögek *metszés–csúcsának* mondhatjuk.

Szembetűnő rokonság mutatkozik az I. és II. tétel közt a következő meggondolás során. Most ne törődjünk azzal, hogy a Σ halmaz elemei pontok, az Ω halmaz elemei pedig Π–sokszögek, hanem csak azt, hogy akár az egyik, akár a másik halmaz elemeinek a száma ugyanaz: $N = n^2+n+1$. Fogalmazzuk meg továbbá a két tételt a következőképpen:

I. *A Σ halmaz két eleme az ω halmaz egy és csak egy elemét* – összekötő sokszög – *határozza meg.*
II. *Az Ω halmaz két eleme a Σ halmaz egy és csak egy elemét* – metszés–csúcs – *határozza meg.*

Ezt, a Σ és Ω közt fennálló logikai szimmetriát *dualitásnak* nevezzük.

III. TÉTEL. *Kiválasztható a Σ elemei közül négy olymódon, hogy azok kettenként hat összekötő Π-sokszöget határoznak meg.*

BÍZONYÍTÁS. Tekintsük a Π_0 és Π_1 sokszöget. E két sokszög közös csúcsa az 1. Legyen Π_0-nak az 1-től különböző két csúcsa j és h; az Π_1-nek az 1-től különböző két csúcsa pedig k és l. A j, h, k, l pontok kettenkénti összekötő Π–sokszögei közül már kettő megvan: a Π_0 és Π_1. Ezek egyike sem lehet a j, k párt összekötő Π-vel azonos, mert különben a másikkal is volna az 1-en kívül még egy közös csúcsa, ámde akkor az I. tétel szerint ezzel a másikkal is azonos volna, ami nem igaz, mert Π_0 nem azonos a Π_1-gyel. Hasonló eredmény adódik a j, l; h, k; h, l párokra nézve is. Még a j, k; j, l; h, k; h, l párok meghatározta Π–sokszögeket kell egymással egybevetni. Hogyha pl. a j, k meghatározta Π–sokszög a j, l meghatározta Π-vel volna azonos, akkor ez a Π a j, k, l szögpontokat mind összekötné, amiből újra az adódik, hogy Π_0 a Π_1-gyel azonos, és ez nem igaz. Ugyanígy adódik a többi esetben is, hogy a párok meghatározta Π–sokszögek páronként különbözők.

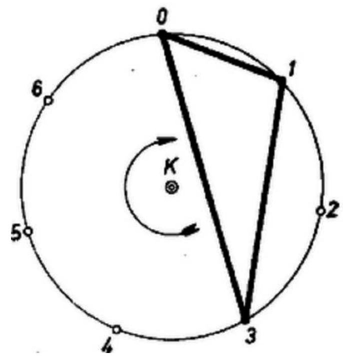
8. Ezek után a sík és a síkgeometria, pontosabban a projektív sík és projektív síkgeometria legkorszerűbb felfogását is ismertetni tudjuk.

Hogyha „egy sík összes pontjain” valamely Σ-nak az összes csúcsait, valamint „a sík összes egyenesein” a Σ-hoz tartozó Ω összes elemeit – a Π_0, Π_1, ..., Π_{N-1} sokszögeket –, továbbá „egy egyenes pontjain” egy Π–sokszög csúcsait akarjuk érteni, akkor ez a mesterkélt fogalomalkotás nem vezet az **I** axiómarendszerrel szembeni ellentmondásra. (Így csak az derül ki, hogy az axiómarendszer – noha a közönséges sík ideális elemekkel való bővítésével származtatott projektív sík jellemzésére készült – másféle elemrendszereket is jellemez.) Ebben az értelemben ugyanis az $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ axiómák rendre ugyanazt mondják, amit az I., II., III. tételek. Ilyen mesterkélt sík végtelenül sokféle van, mert ahogyan a 6. szakaszban említettük, minden törzsszám–hatványhoz tartozik Π–részsokszöggel rendelkező Σ sokszög. Az így definiált síkot $n = p^2$–*adrendű* **GALOIS** *síknak* nevezik.

Bármiféle elemek halmazát tekintjük is, ha abban az $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ axiómákban szereplő fogalmak értelmezhetők, és az adott értelmezések szerint igazak is az axiómák állításai, akkor *a halmazt projektív síknak nevezik.*

Az axiómarendszernek megfelelő különféle síkokra azt is szokták mondani, hogy *az axiómarendszer által definiált modellek.* Eddig tehát az **I** által definiált modellekkel ismerkedtünk, de nem minden modellel, hanem csak a közönséges síkból bővítéssel származtatott végtelen modellel és a véges modellek közül a GALOIS–félékkel. A „végtelen” és „véges” arra utal, hogy a sík pontjainak száma végtelen vagy véges. Az **I**-ből tehát – további tulajdonságok ismerete nélkül – nem lehet levezetni még azt sem, hogy az egyenesnek végtelen sok pontja van, hiszen amint láttuk, az olyan modellre nézve is igazak az **I** axiómái, amelynek minden egyenese $n+1 = p^\alpha + 1$ pontból áll. Az axiómarendszer éppen azt mondja ki, ami az általa definiált modellek közös tulajdonsága; és minden pusztán az axiómákból levezethető tétel a modellek mindegyikére nézve, vagyis közösen igaz.

Talán első hallásra meglepő az az állítás, hogy a FANO–tétel az **I**-ből nem vezethető le. Hiszen láttuk, hogy a közönséges sík bővítésével származtatott projektív síkon – *klasszikus projektív síknak* is nevezik – az **F**-tétel igaz. A 3-adrendű GALOIS sík tanulmányozása során kiderülne, hogy az **F**–tétel azon is igaz. Most megmutatjuk, hogy például a 2–odrendű GALOIS síkon az **F**–tétel nem igaz.



4. ábra

A másodrendű GALOIS sík (4. ábra) a közönséges sík szabályos hétszögével azonos, egyeneseit a

$$0^* = \{0,\ 1,\ 3\},\quad 1^* = \{1,\ 2,\ 4\},\quad 2^* = \{2,\ 3,\ 5),$$
$$3^* = \{3,\ 4,\ 6\},\quad 4^* = \{4,\ 5,\ 0\},\quad 5^* = \{5,\ 6,\ 1\},\quad 6^* = \{6,\ 0,\ 2\}$$

háromszögek jelentik. Tekintsük most – például a 0, 2, 3, 4 pontnégyest. A pontnégyes elemei kettenként a

$[0,\ 2]{=}\{6,\ 0,\ 2\}{=}6^*,\quad [3,\ 4] = \{3,\ 4,\ 6\} = 3^*;$

$[0,\ 3]{=}\{0,\ 1,\ 3\}{=}0^*,\quad [2,\ 4] = \{1,\ 2,\ 4\} = 1^*;$

$[0,\ 4]{=}\{4,\ 5,\ 0\}{=}4^*,\quad [2,\ 3] = \{2\ 3,\ 5\} = 2^*$

összekötő egyeneseket feszítik ki. Ezeket már úgy osztottuk párokba, soronként írva a párokat, hogy az egyenespár egyik egyenese a pontnégyes valamelyik pontpárját, másik egyenese a pontnégyes hátra levő két pontját köti össze. Vagyis a

$$6^*,\ 3^*;\quad 0^*,\ 1^*;\quad 4^*,\ 2^*$$

párok metszéspontjai az átlóspontokat jelentik. Lássuk csak e ponthármaspárok közös elemét! A részletes kiírásukból közvetlenül kitűnik, hogy rendre a

$$6,\ 1,\ 5$$

pontokról van szó. Lám! ez a három átlóspont most nem háromszöget, hanem egyenest feszít ki: az $5^* = \{5,\ 6,\ 1\}$ egyenesről van szó.

9. Befejezésként azt emeljük ki, hogy az **I**-ből pusztán következtetéssel adódó tétel az **I**-nek megfelelő bármely modellre nézve érvényes, hiszen az összes lehetséges modellek közös tulajdonságából, az **I**-ből indul ki az ilyen levezetés.

Példaképpen lássunk egy ilyen „sok legyet egy csapással” jellegű levezetést.

Legyen a és b két egyenes, P pont pedig egyikhez se illeszkedjék. Tétel: P-ből a pontjait b-re vetítve az utóbbinak minden pontját megkapjuk és mindegyiket csak egyszer.

Bizonyítás: legyen X az a-nak egyik tetszőleges pontja. Az $\mathbf{I}_1$ szerint egy PX egyenes, röviden x egyenes van. Ez az x sem a-val, sem b-vel nem azonos, mert az utóbbiaknak P nem eleme, viszont x-nek eleme. No de akkor az x és b egyenespárnak $\mathbf{I}_2$ szerint van egy közös Y pontja, sőt $\mathbf{I}_1$ szerint csak egy ilyen van. Az Y a P-től különbözik, mert Y a b egyenesnek eleme, viszont a P nem. Az a egyenes két pontjának, X_1 és X_2-nek nem lehet ugyanaz az Y pont a b-re eső vetülete. Az x_1 és x_2 ugyanis nem lehet azonos, mert az X_1 et és X_2-t egyaránt tartalmazó egyenes, az a, nem tartalmazza P-t. Másrészt az egymástól különböző x_1, x_2 egyeneseknek P is és Y is közös pontja volna, ami $\mathbf{I}_2$ szerint lehetetlen. Ezek szerint az a pontjait vetítve a b egyenes más–más pontjait kaptuk.

Azt kell mqg belátnunk, hogy így a b-nek minden pontja előáll. Vegyük evégből b egy tetszőleges V pontját. A PV összekötő egyenes, röviden u, egy U pontban metszi a-t. Ennek az U-nak a P-ből való vetülete a V.

Bizony kínosan nehézkesnek látszik ez a csupán **I**-re támaszkodó okoskodás. Ámde megéri a fáradozást, mert a tétel végtelen sok modell bármelyikére igaz dolgot állít. Érdemes legalább egy modellen megnézni, hogy mit mond e tétel.

Vegyük evégből és gyakorlásképpen a harmadrendű GALOIS síkot, vagyis a szabályos 13-szöget, melyben a Π–sokszögek négyszögek. (Most már az ábrakészítést és annak alapján az egyeneseket jelentő számnégyesek összeállítását, ami a 8. szakaszban tárgyaltak mintájára megy, az olvasóra bízzuk.) Az egyenesek:

$$0^* = \{0,\ 1,\ 3,\ 9\},\quad 1^* = \{1,\ 2,\ 4,\ 10),\quad 2^* = \{2,\ 3,\ 5,\ 11\},\ldots,$$
$$12^* = \{12,\ 0,\ 3,\ 8\};$$

ahol is k^* a Π_k sokszög csúcspontjainak halmaza. Legyen most a P vetítési középpont szerepét betöltő elem az 5. Továbbá az a, b szerepét vegye át a 0^*, 1^*. Két sorban felírjuk a 0^* és 1^* pontjait, mégpedig az első sor elemei alá rendre a vetületeket írva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

A vetítő egyenesek sugársorát rendre a 4^*, 5^*, 2^*, 9^* egyenesek alkotják.

10. A GALOIS geometriáról szóló első nagyszabású, úttörő jellegű mű, mely erre a kutatási területre a matematikusok fokozott érdeklődését ráirányította, 1959-ben jelent meg. Szerzője B. SEGRE professzor, a nagyhírű római „Seminario di Algebra Geometria e Topologia” igazgatója. Ma már az ő tanítványai művelik ezt az új tudományágat, s rövid néhány esztendő alatt számos szép eredményt értek el. B. SEGRE professzor 1963-ban töltötte be hatvanadik életévét, jelen közleményemet az ő tiszteletére írtam.

Kárteszi Ferenc