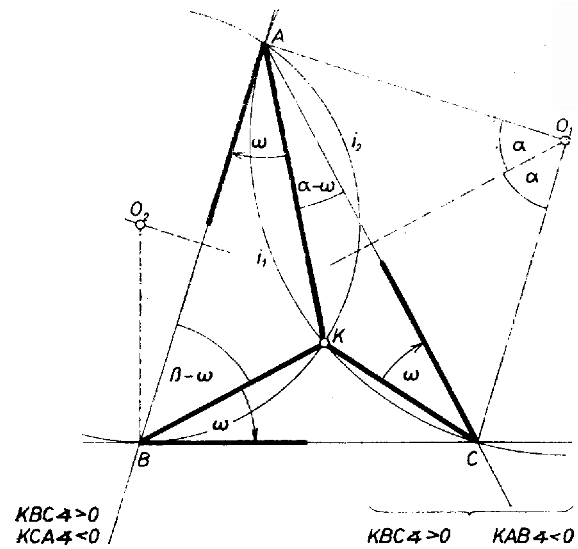
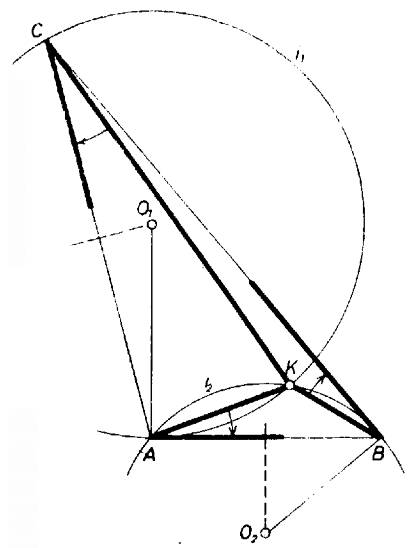
I. A K pont csak a háromszög belsejében lehet. Ha ugyanis K a síknak A-tól a BC egyenes által elválasztott pontja, és az ABC háromszög pozitív körüljárású, akkor $0 < KBC\sphericalangle < \pi$ (forgásszög főértékének a $-\pi$ és π közti értékét véve), viszont $KAB\sphericalangle$ és $KCA\sphericalangle$ közül legalább az egyik $-\pi$ és 0 közé esik (1a és b ábra).



1a. ábra



1b. ábra

Megállapításunkból élesebben az következik, hogy a három forgásszög iránya ellentétes a háromszög csúcsai A, B, C sorrendű körüljárásának irányával, és abszolút értéke kisebb, mint a háromszög legkisebb szöge.

Legyen egy, a háromszög belsejében levő K pontra a három forgásszög közös értéke ω, ekkor $KAC\sphericalangle = \alpha - \omega$, $KBA\sphericalangle = \beta - \omega$, és a CA, AB oldalnak K-ból vett látószöge rendre $CKA\sphericalangle = 180° - \alpha$, $AKB\sphericalangle = 180° - \beta$, tehát K megszerkeszthető a megfelelő i_1, ill. i_2 látókörív közös pontjaként. Az i_1-et tartalmazó kör O_1 középpontjánál levő szög $AO_1C\sphericalangle = 2\alpha$, így $CAO_1\sphericalangle = 90° - \alpha$ (előjellel együtt értve), tehát $BAO_1\sphericalangle = BAC\sphericalangle + CAO_1\sphericalangle = 90°$, eszerint O_1 az A-ban AB-re állított merőlegesnek és AC felező merőlegesének közös pontja, más szóval: O_1, a C-n átmenő és AB-t A-ban érintő kör középpontja. Eszerint i_1 e körnek az az AC íve, mely az AC egyenesnek B-t tartalmazó partján van. i_2 pedig hasonlóan az A-n átmenő és BC-t B-ben érintő körnek az az íve, amely az AB egyenesnek C-t tartalmazó partján van. Ezzel eljárást adtunk K megszerkesztésére.

i_1 és i_2 az A-n kívül egy további pontban metszik egymást – ez K –, mert A-beli érintőik szöget alkotnak, nagysága β. Az i_1, i_2 ívek, és így K is a BAC szögtartományban vannak, éspedig a háromszög belsejében, mert az i_2-t tartalmazó kör csupán érinti BC-t és áthalad A-n. Ezek alapján $ACK\sphericalangle = BAK\sphericalangle$, mert az i_1-nek AK rész-ívén nyugvó kerületi szögek, és ugyanígy $BAK\sphericalangle = CBK\sphericalangle$, tehát a K pont megfelel a követelménynek.

A végzett szerkesztés bármely háromszögben végrehajtható, minden háromszögben egyértelműen létezik a K pont.

II. A KCA és KCB háromszögekből a sinustétel alapján, majd az addíciótételt alkalmazva

$$KC = \frac{AC\sin(\alpha-\omega)}{BC\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{BC\sin\omega}{\sin(180^\circ-\gamma)},$$
$$b\sin\gamma\sin\alpha\cos\omega - b\sin\gamma\cos\alpha\sin\omega = a\sin\alpha\sin\omega,$$

amiből átrendezés után

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{a\sin\alpha + b\sin\gamma\cos\alpha}{b\sin\gamma\sin\alpha} = \frac{a}{b\sin\gamma} + \operatorname{ctg}\alpha.$$

Itt az első tag

$$\frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{b\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma + \left(\frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma}\right)\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta},$$

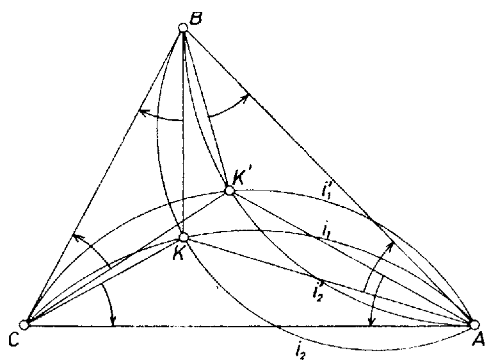
ennek második tagja $\operatorname{ctg}\beta$, hiszen a zárójelben 1 áll, ennélfogva

$$\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma. \tag{1}$$

Skopál István (Budapest, Kölcsey F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Akkor is egyértelműen létrejön a K pont, ha egy háromszögben B és C betűzését felcseréljük. Ezzel a körüljárás iránya ellentétesre fordul, úgyszintén ω iránya is megfordul, abszolút értéke azonban (1) szerint változatlan. Az új, K' pontra nézve az eredeti betűzés szerinti $K'AC$, $K'CB$ $K'BA$ forgásszögek egyenlők. K' csak akkor esik egybe K-val, ha $\alpha-\omega=\omega=\beta-\omega==\gamma-\omega$, azaz $\alpha=\beta=\gamma$ esetén, szabályos háromszögben.

K-t és K'-t a háromszög *Brocard*-féle pontjainak, ω-t pedig *Brocard*-féle szögének szokás nevezni. (2. ábra). [1]



2. ábra

2. A P. 56. problémában[2] $\operatorname{ctg}\omega$-nak a háromszög oldalaival és területével való kifejezését használjuk fel:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2bc\cos\alpha}{2bc\sin\alpha} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4t}$$

és $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ analóg kifejezései alapján

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4t}$$

Egy másik szimmetrikus kifejezés (1)-ből $\sin\alpha = a/2r$ és az analóg kifejezések helyettesítésével, ahol r a háromszög köré írt kör sugara:

$$\operatorname{ctg}\omega = 2r\left(\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}\right).$$

[1] Lásd *Kürtschák József–Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János:* Matematikai versenytételek, I. rész, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 28–29. o.

[2] Lásd ezen számban, 143. o.