Első feladat. *Egy teremben p sorban és q oszlopban pq szék van ($p > 1,\ q > 1$). Minden széken egy-egy tanuló ül, mind különböző magasságú. A tanár minden sorból kiszemeli a legkisebbet, ezek legnagyobbikának magassága a. Azután minden oszlopból kiszemeli a legnagyobbat, ezek legkisebbikének magassága b. Eldöntendő, hogy az $a < b$, $a = b$, $a > b$ esetek közül melyek lehetségesek, s hogy minden lehetséges eset bekövetkezése biztosítható-e az ülésrend megváltoztatásával.*

Megoldás. Nevezzük egyszerűség kedvéért az a magasságú tanulót a-nak, a b magasságút b-nek, stb. Tekintsük a sorát és b oszlopát. E sor és oszlop kereszteződésében elhelyezkedő széken is ül egy tanuló. Ennek magasságát c-vel jelöljük.

Számolunk azzal a lehetőséggel, hogy a, b, c nem mind különbözők. Ha ugyanis a és b egy sorban ül, akkor c azonos b-vel. Ha a és b egy oszlopban ül, akkor c és a azonos. Ha pedig a azonos b-vel, akkor c is azonos velük.

Minthogy a és c egy sorban ül, és a a sorában a legkisebb, c-nél sem lehet nagyobb, azaz $a \le c$. Ugyanígy adódik, hogy $c \le b$, hiszen c és b egy oszlopban ül, és b az oszlopában a legnagyobb. Ezek szerint $a \le c \le b$, tehát $a \le b$, vagyis: az $a > b$ eset nem következhetik be.

Az $a = b$ eset bekövetkezik, ha pl. az utolsó sorba a legnagyobb tanulókat ültetjük. Ekkor az utolsó sorban ülők legkisebbike egyaránt betölti a és b szerepét, mert egyrészt a sorában nincs nála kisebb, de minden más sorban van, másrészt az oszlopában nincs nála nagyobb, de minden más oszlopban van.

Az $a < b$ eset bekövetkezik, ha pl. az előző elrendezésből indulunk ki, de az utolsó sor legkisebb tanulója helyet cserél az oszlopában ülő valamelyik másik tanulóval. Az előreültetett tanuló a helycsere után is változatlanul betölti b szerepét, hiszen oszlopában nincs nála nagyobb, de minden más oszlopban van. Minthogy azonban az előreültetett tanuló új sorának minden más tanulója nála kisebb, a keresésekor ő még az egyes sorokból kiszemelt legkisebbek között sem szerepel, s így a szerepét nem ő tölti be.

Megjegyzés. 1. A feladat $p > 1$, $q > 1$ megszorítását kihasználtuk akkor, amikor ugyanabban az oszlopban ülő másik tanulóról, s amikor ugyanabban a sorban ülő minden más tanulóról szóltunk. A megszorításra szükség van, mert ha a székek egyetlen sorban vagy egyetlen oszlopban helyezkednek el, akkor nyilván a legkisebb, illetőleg a legnagyobb tölti be egyszerre a és b szerepét. Ilyenkor tehát csak az $a = b$ eset valósulhat meg.

2. Felvetjük a kérdést, hogy minden tanuló számolhat-e azzal a lehetőséggel, hogy a szerepét majd ő tölti be. Ugyanezt kérdezzük a b szerepet illetően is. Azt állítjuk, hogy a legkisebb $p-1$ tanuló és a legnagyobb $q-1$ tanuló egyik szerep betöltésekor sem jöhet szóba.

a esetében ez abból következik, hogy a a saját sorának legkisebbike, tehát a sorában van $q-1$ nála nagyobb tanuló, viszont minden más sorban van a-nál kisebb, azaz van legalább $p-1$ nála kisebb tanuló. Hasonlóan okoskodhatunk b esetében is, mert a saját oszlopában $p-1$ nála kisebb tanuló ül, és minden más oszlopban van nála nagyobb, azaz legalább $q-1$ nála nagyobb tanuló van.

Ha tehát a tanulókat a legkisebbtől kezdve megszámozzuk, akkor csak a

$$p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots,\ pq-q+1$$

sorszámú tanulók tölthetik be az a, b szerepeket.

3. Eddigi megállapításaink bizonyos korlátozásokat tartalmaztak. Azt kérdezzük most, hogy ezeket a korlátozásokat figyelembe véve minden eset megvalósulhat-e. Pontosabban szólva a következő kérdést vetjük fel: A tanár a teremben elhelyezkedő székek egyikére a jelet, egy másikra vagy esetleg ugyanarra b jelet tesz; ezután a folyosón gyülekező tanulókat nagyság szerint sorba állítja, és a p, $p+1$, $\ldots$, $pq-q+1$ sorszámu tanulók közül kijelöl egyet vagy kettőt aszerint, hogy a teremben ugyanarra a székre tette-e az a és a b jelet, vagy sem, mégpedig abban az esetben, amikor a megjelölt székek nincsenek sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor két olyan tanulót jelöl ki, akik a nagyság szerinti sorban nem állnak egymás mellett; kérdés, hogy elhelyezhetők-e a tanulók a teremben úgy, hogy a megjelölt székekre a kijelölt tanulók üljenek, mégpedig, ha ketten vannak, akkor a kisebbikük üljön az a jelű székre, s hogy a és b szerepét éppen az a és b jelű széken ülő tanuló töltse be.

Azt állítjuk, hogy ez mindig lehetséges. Meg kell említenünk, hogyha a megjelölt székek nincsenek sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor megoldásunk értelmében szerepelnie kell egy a-nál nagyobb és b-nél kisebb c tanulónak, s ezért a és b a nagyság szerinti sorban nem állhattak egymás mellett. Ez az eset természetesen csak akkor valósítható meg, ha a p, $p+1$, $\ldots$, $pq-q+1$ sorszámú tanulók száma 2-nél nagyobb, azaz

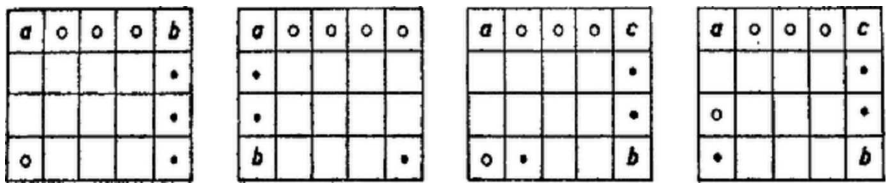
$$pq-p-q+2 > 2,$$
$$(p-1)(q-1) > 1,$$

vagyis ilyenkor a p, q értékek között kell 2-nél nagyobbnak lennie. Eszerint bizonyos kivételt jelent a $p = q = 2$ eset, mert ekkor a 4 szék közül nem szabad két átlósan elhelyezkedőt megjelölni. Ha ugyanis a tanár így járna el, akkor nem tudna a folyosón az előírást betartva kijelölni két tanulót.

Állításunk bizonyítása érdekében először is azt említjük meg, hogy a teremben a sorokat is és az oszlopokat is szabadon felcserélhetjük a rajtuk ülőkkel együtt; ez nem változtat azon, hogy ki tölti be az a, b szerepeket. Ezért nem jelent megszorítást, ha csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor az a jelű szék az utolsó sor bal szélén áll, a b

jelű szék pedig az első vagy az utolsó sor valamelyik szélső széke. Nevezzük a $p-1$ legkisebb tanulót „kicsinek”, a $q-1$ legnagyobb tanulót pedig „nagynak”.

Ha a b jel is az utolsó sor bal szélső székére került, akkor a kijelölt egyetlen tanulót erre a székre ültetjük, az utolsó sor többi székére a nagyokat, a bal szélső oszlop többi székére a kicsiket, a még el nem foglalt székekre pedig a többi tanulót ültetjük. Ilyenkor valóban az egyetlen kijelölt tanuló jut az a, b szerepek mindegyikéhez.



1. ábra

A többi esetben ábrán mutatunk be a követelményt kielégítő elrendezést (1. ábra). Az ábra a $p=4$, $q=5$ esetre készült, de módszere minden $p>1$, $q>1$ esetben alkalmazható. A kicsik helyét pont, a nagyok helyét kör jelöli. Az ábrán meg nem jelölt helyeken a többi tanuló tetszés szerint helyezkedhetik el. Ha a és b átellenes sarkokban van, akkor c olyan tanulót jelöl, akit a nagyság szerinti sorban a és b közrefog. Erre az esetre ábránk két elrendezést mutat be. Az első akkor alkalmazható, ha $q>2$, a második pedig akkor, ha $p>2$. Könnyű ellenőrizni, hogy a követelmények minden esetben teljesülnek.

Második feladat. *Bebizonyítandó, hogy ha α hegyesszög, akkor*

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

I. megoldás. A baloldali szorzat

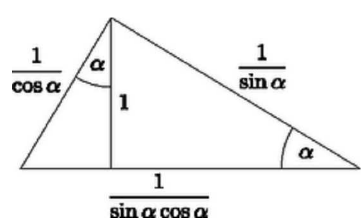
$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

alakban írható, hiszen $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Minthogy egy szög szinusza és koszinusza 1-nél nagyobb nem lehet, a felírt összeg második és harmadik tagja legalább 1, utolsó tagja pedig legalább 2. A teljes összeg értéke tehát legalább 5. Az összeg azonban nem lehet 5, mert a két középső tag nem lehet egyszerre 1, hiszen $\sin\alpha=1$ és $\cos\alpha=1$ egyszerre nem teljesülhet. Az összeg értéke eszerint 5-nél nagyobb.

II. megoldás. Egy α szögű 1 magasságú derékszögű háromszöget tekintünk (2. ábra) A szögfüggvények értelmezéséből következik, hogy e háromszög befogói és átfogója

$$a=\frac{1}{\cos\alpha},\quad b=\frac{1}{\sin\alpha},\quad c=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Feladatunk $a+b+c>4$ bizonyítását kívánja. Ez nyomban következik abból, hogy $a+b>c$ és $c\geq 2$, hiszen a derékszögű háromszög magassága az átfogónak legfeljebb a fele, amint ez a Thales-kör szemléletéből is nyomban adódik.



2. ábra

III. megoldás. A feladat állításán túlmenően bebizonyítjuk, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\sqrt{2}=5{,}828\ldots,$$

s hogy egyenlőség csak az $\alpha=45^\circ$ esetben következik be. Ennek igazolásához az I. megoldásra hivatkozva elég belátnunk, hogy

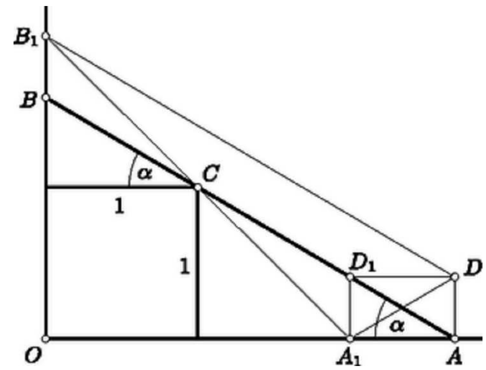
$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geq 2\sqrt{2},$$

s hogy itt is csak $\alpha=45^\circ$ esetén következik be az egyenlőség. Ezt háromféleképpen bizonyítjuk be.

a) Az előző megoldás jelöléseit használva $a+b\geq 2\sqrt{2}$ a bizonyítandó állítás. Ez abból adódik, hogy

$$(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=c^2+2cm\geq 8.$$

Felhasználtuk itt Pythagoras tételét, a terület kétféle kifejezése alapján adódó $ab=cm$ összefüggést és az $m=1$ esetben érvényes $c\geq 2$ egyenlőtlenséget. Egyenlőség eszerint csak $c=2m$ esetén, azaz egyenlőszárú derékszögű háromszögre következik be.



3. ábra

b) Forgassuk el a 2. ábrában a magasságtól balra elhelyezkedő háromszöget felső csúcsa körül pozitív irányban 90°-kal. Így a 3. ábra vastagon megrajzolt részéhez jutunk. A bizonyítandó állítás szerint az AB szakasz hosszabb, mint a 45°-kal hajló A_1B_1 szakasz, hiszen ennek hossza $2\sqrt{2}$. Azt kell tehát igazolnunk, hogy a derékszögű $AOB\sphericalangle$ szárait összekötő s a C ponton áthaladó szakaszok közül a szimmetrikusan elhelyezkedő A_1B_1 szakasz a legrövidebb.

Minthogy az OA és OB szár között nincs szerepkülönbség, feltehetjük, hogy $\alpha < 45°$. A B pont C-re vonatkozó tükörképét D_1-gyel jelöljük. A C-re vonatkozó szimmetria miatt a BB_1, A_1D_1 szakaszok párhuzamosak és egyenlők. A velük párhuzamos és egyenlő AD szakasz a $BADB_1$ parallelogrammához és az A_1ADD_1 téglalaphoz vezet. Az utóbbiból kiolvasható, hogy $AA_1D\sphericalangle = A_1AD_1\sphericalangle = \alpha$, és így $B_1A_1D\sphericalangle = 135° - \alpha > 90°$. Eszerint a $B_1A_1D\triangle$-ben DB_1 a legnagyobb oldal, tehát $A_1B_1 < DB_1 = AB$.

c) Felhasználjuk, hogy a pozitív x, y számok $a(x,y)$ számtani, $g(x,y)$ mértani és $q(x,y)$ négyzetes közepére

$$g(x,y) \le a(x,y) \le q(x,y),$$

s hogy egyenlőség mindkét esetben csak $x = y$ esetén teljesül. Eszerint

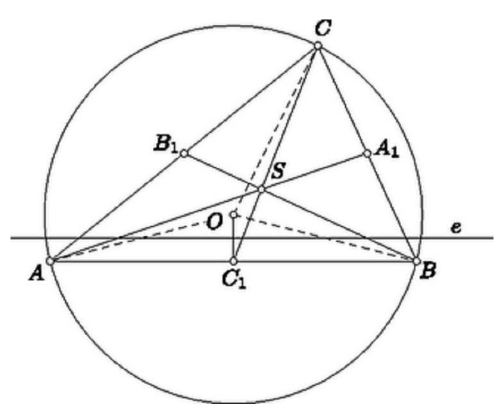
$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = 2a\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) \ge 2g\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$$
$$= \frac{2}{g(\sin\alpha, \cos\alpha)} \ge \frac{2}{q(\sin\alpha, \cos\alpha)} = 2\sqrt{2}.$$

Egyenlőség csak $\sin\alpha = \cos\alpha$, tehát $\alpha = 45°$ esetén áll fenn.

Megjegyzés. A feladatban α hegyesszöget jelentett. Erre a megszorításra azért volt szükség, mert ha $90° < \alpha < 180°$ vagy $270° < \alpha < 360°$, akkor a feladat egyenlőtlenségének a baloldalán csak az egyik tényező pozitív, s a szorzat negatív. Ha viszont $180° < \alpha < 270°$, akkor mindkét tényező negatív, de szorzatuk 1-nél kisebb. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Harmadik feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög nem tompaszögű, akkor súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög köré írt kör sugarának négyszerese.*

Megoldás. Ha az $ABC\triangle$ nem tompaszögű, akkor (a belsejében vagy a határán) tartalmazza a köréírt kör O középpontját. Ezért az S súlypont által meghatározott SAB, SBC, SCA háromszögek közül legalább az egyik szintén tartalmazza az O pontot. Legyen az $SAB\triangle$ ilyen (4. ábra).



4. ábra

Minthogy az $SAB\triangle$ tartalmazza az $OAB\triangle$-et,

$$SA + SB \ge OA + OB,$$

és az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha O és S azonos. Eszerint az $s_a = AA_1$, $s_b = BB_1$ súlyvonalakra és a körülírt kör r sugarára

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b \geq 2r,$$

vagyis

$$s_a + s_b \geq 3r.$$

Ha O azonos C_1-gyel, akkor nyilván $CO = CC_1$. Ha azonban O nem azonos C_1-gyel, akkor az OC_1 szakaszt merőlegesen felező e egyenes belevág a háromszögbe, tehát a vele párhuzamos AB szakaszt elválasztja a C csúcstól. Eszerint C és O ugyanabban az e egyenes által határolt félsíkban van, s ezért a C pont az e egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő O, C_1 pontok közül O-hoz van közelebb. A $CC_1 = s_c$, és $CO = r$ szakaszokra ezek szerint

$$s_c \geq r$$

mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha O és C_1 azonos.

Egyenlőtlenségeinket összeadva

$$s_a + s_b + s_c \geq 4r$$

adódik, de itt az egyenlőség soha sem teljesülhet, mert egyszerre nem teljesülhet mind a két összeadott egyenlőtlenségben, hiszen O nem lehet az egymástól különböző S, C_1 pontok mindegyikével azonos.

Megjegyzések. 1. Nem hagyható el a feladatnak az a megszorítása, hogy a háromszög nem tompaszögű. Bármilyen csekély túllépést engednénk is meg 90° fölé, a feladat állítása már nem volna helyes. Bebizonyítjuk, hogy ez valóban így van.

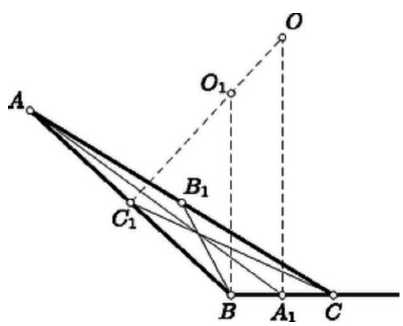
Induljunk ki tehát egy tetszőlegesen megadott $ABC\sphericalangle > 90^\circ$ szögből. Messe az $AB = c$ szakasz felezőmerőlegese a BC szárra B-ben emelt merőlegest az O_1 pontban (5. ábra). A BC száron úgy választjuk meg a C pontot, hogy a $BC = a$ távolságra

$$a + c \leq 2 \cdot BO_1$$

teljesüljön. Az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarára

$$r = BO > A_1O > BO_1,$$

hiszen a két utolsó szakasz ugyanannak a szögnek párhuzamos szelője, és BO_1 van a szög csúcsához közelebb.



5. ábra

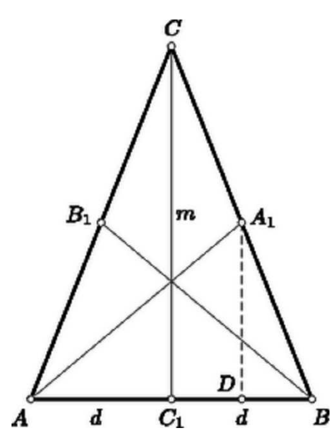
Az $ABC\triangle$ súlyvonalaira az ABA_1, BC_1B_1, CBC_1 háromszögek egyenlőtlenségei alapján

$$s_a < \frac{a}{2} + c, \quad s_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \quad s_c < a + \frac{c}{2}.$$

Ezek szerint

$$s_a + s_b + s_c < 2(a + c) < 4 \cdot BO_1 < 4r.$$

2. Bebizonyítjuk, hogy akkor sem volna helyes a feladat állítása, ha benne 4 helyett valamely 4-nél bármi csekéllyel is nagyobb szám állna.



6. ábra

Egy $2d$ alapú, m magasságú egyenlőszárú háromszög (6. ábra) súlyvonalaira az $AA_1D\triangle$-re vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával

$$s_a = s_b < \frac{m}{2} + \frac{3}{2}d, \quad s_c = m,$$
$$s_a + s_b + s_c < 2m + 3d.$$

A körülírt kör sugarára

$$r > \frac{m}{2},$$

hiszen az m magasságot a kör tartalmazza. Ezek szerint

$$s_a + s_b + s_c < \left(4 + 6\frac{d}{m}\right) r.$$

Ha λ egy tetszőleges, 4-nél nagyobb szám, m rögzítése után d megválasztható olyan kicsire, hogy

$$4 + 6\frac{d}{m} < \lambda$$

teljesüljön. Az így adódó háromszögre a fentiek szerint

$$s_a + s_b + s_c < \lambda r.$$

3. A feladat arról szólt, hogy a súlyvonalak összege a körülírt kör sugarának legalább hányszorosa. Bebizonyítjuk most, hogy legfeljebb 4,5-szöröse, és itt a háromszöget illetően semmiféle megszorítást sem teszünk. Szabályos háromszög esetében a vizsgált arány éppen 4,5. Meglepő talán a nem tompaszögű háromszögekre érvényes viszonylag szűk (4, 4,5) értékköz.

Tekintsük a sík egy P pontjának az $ABC\triangle$ csúcsaitól mért távolságait. Ezek számtani közepét $a(P)$, négyzetes közepüket pedig $q(P)$ jelöli. Ismeretes, hogy $a(P) \le q(P)$.

Bizonyításunk arra épül, hogy $q(P) \ge q(S)$. Ha az A, B, C pontokba egységnyi tömegeket helyezünk, akkor $3\big[q(P)\big]^2$ e tömegrendszer tehetetlenségi nyomatéka a síkot a P pontban merőlegesen döfő egyenesre vonatkozólag. Az imént kimondott egyenlőtlenség következik tehát abból, hogy párhuzamos tengelyek közül a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Egyenlőtlenségünket fizikai ismeretekre való hivatkozás nélkül akarva bebizonyítani bevezetjük az

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{SB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{SC} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{SP} = \mathbf{p}$$

vektorokat (lásd pl. Matematikai Versenytételek, II. rész, 26–30. o. és 69. o.). Felhasználjuk azt, hogy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Az egyenlőtlenségünkben szereplő értékekre

$$\begin{aligned}
3\big[q(S)\big]^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2,\\
3\big[q(P)\big]^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{p})^2 + (\mathbf{b}-\mathbf{p})^2 + (\mathbf{c}-\mathbf{p})^2 =\\
&= (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2\mathbf{p}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) + 3\mathbf{p}^2 =\\
&= 3\big[q(S)\big]^2 + 3\mathbf{p}^2 \ge 3\big[q(S)\big]^2.
\end{aligned}$$

Ezzel a $q(P) \ge q(S)$ egyenlőtlenség bizonyítást nyert, de ebből eredeti állításunk is nyomban következik:

$$s_a + s_b + s_c = \frac{9}{2}a(S) \le \frac{9}{2}q(S) \le \frac{9}{2}q(O) = \frac{9}{2}r.$$

4. Megemlítjük, de nem részletezzük, hogy a tetraéder súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának legfeljebb 16/3-szorosa, s hogy ez ugyanúgy bizonyítható, ahogyan a megfelelő síkbeli állítást éppen bebizonyítottuk.

Ha feladatunk állításának térbeli megfelelőjét keressük, valamilyen megszorítást kell tennünk a tetraéderre vonatkozólag, annak megfelelően, hogy a feladat csak nem tompaszögű háromszögekről szólt. Azok a háromszögek nem tompaszögűek, amelyek tartalmazzák a köréjük írt kör középpontját. Érthető tehát, hogy azokról a tetraéderekről szólunk, amelyek tartalmazzák a köréjük írt gömb középpontját, azonban csak bizonyítás nélkül említjük meg, hogy az ilyen tetraéderek súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának 4-szeresénél nagyobb, és itt 4 helyébe nagyobb számot írva már helytelen állításhoz jutunk.

Hajós György