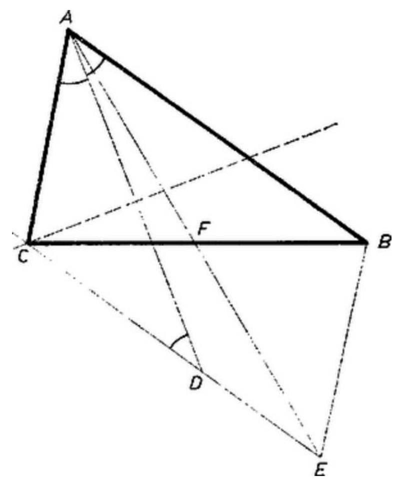
1. feladat. *Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy szöge, az ezt bezáró oldalak különbsége és a szög csúcsából kiinduló súlyvonal hossza.*

Megoldás. Készítsünk vázlatot, legyen ABC a keresett háromszög, az A csúcsnál levő α szög, az onnan induló s_a súlyvonal és az A-ból kiinduló két oldal különbsége adottak. Jelöljük A-nak a BC oldal F felezőpontjára való tükörképét E-vel. Az $ABEC$ négyszög paralelogramma, amelyben ismertek a szögek (az A-nál és E-nél levő α, a B-nél és C-nél levő $180° - \alpha$), az AE átló ($2s_a$) és a szomszédos oldalak különbsége. Az ACE háromszöget tekintve, abban ismert az AE oldal, a szemközti szög és az azt bezáró oldalak különbsége, így megszerkesztése a tankönyvből ismert alapfeladat: rámérve CE-re a $CD = CA$ szakaszt az ACD háromszög egyenlő szárú, amiből $ADE\sphericalangle = 180° - \alpha/2$ adódik, ismert továbbá az ADE háromszögben két oldal: DE (a különbség) és $AE = 2s_a$.



Ezek után a szerkesztés menete a következő: Az előírt különbséggel egyenlő hosszú DE szakaszt húzunk, ezzel D-ben $180° - \alpha/2$ szöget bezáró félegyenest szerkesztünk és ezt elmetsszük az E középpontú, $2s_a$ sugarú körívvel: a metszéspont legyen A. Megszerkesztjük az AD szakasz felező merőlegesének és az ED egyenesnek C metszéspontját; végül vesszük C-nek az AE szakasz F felezőpontjára való B tükörképét.

Az ABC háromszög megfelel a feltételeknek. Ugyanis a tükrözés miatt F felezi a BC szakaszt, tehát AF az ABC háromszög súlyvonala, másrészt hossza s_a. Az $ECAB$ négyszög paralelogramma, AB párhuzamos CD-vel, ezért a BAD és CDA szögek egyenlők, ugyanis váltószögek, továbbá $DAC\sphericalangle = CDA\sphericalangle$, mert az ACD háromszög egyenlő szárú, így pedig $BAC\sphericalangle = BAD\sphericalangle + DAC\sphericalangle = 2CDA\sphericalangle = \alpha$. Végül $AB - AC = CE - CA = CE - CD = DE$, az előírt hosszúság.

Minthogy nyilvánvalóan $0° < \alpha < 180°$, azért $ADE\sphericalangle = 180° - \alpha/2 > 90°$, tehát ez a szög az ADE háromszög legnagyobb szöge. Így az ADE háromszög szerkeszthetőségének feltétele, hogy $AE > ED$ legyen, azaz a keresett háromszög súlyvonalának kétszerese nagyobb legyen a szöget bezáró oldalak különbségénél. Másrészt $\alpha/2$ hegyesszög, azért C mindenesetre létrejön éspedig valóban DE-nek D-n túli meghosszabbításán, amint a különbség képezésében felhasználtuk. Végül B mindig létrejön, ezért a feladatnak a mondott feltétel teljesülése esetén 1 megoldása van.

2. feladat. *Egy papírra többjegyű számok vannak írva. Ezek közül kihúzzuk azokat, amelyeknek az utolsó jegyük páratlan, de az utolsó előtti páros, továbbá azokat, amelyeknek az utolsó jegye páratlan és 3-mal nem oszthatók, valamint azokat is, amelyeknek utolsó előtti jegye páratlan és 3-mal oszthatók. Bizonyítsuk be, hogy így a papíron csupa páros szám maradt.*

Megoldás. Tudjuk, hogy egy szám aszerint páros vagy páratlan, amint utolsó jegye páros vagy páratlan. Így, ha maradnak az első lépés után a papíron páratlan számok, akkor azoknak már az utolsó két jegye páratlan. Ezek közül a 3-mal nem oszthatókat kihúzzuk a második alkalommal, a 3-mal oszthatókat pedig a harmadik alkalommal. Így egyetlen páratlan szám sem marad a papíron, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzések. 1. Az utolsó lépésben esetleg páros számokat is kihúztunk, ez azonban kérdésünk szempontjából lényegtelen.

2. A 3-mal való oszthatóság helyett mondhatnánk bármilyen más tulajdonság nem teljesülését, ill. teljesülését a második, ill. harmadik kihúzási előírásban.

3. Még általánosabban a „párosnak lenni", „páratlan utolsó előtti jeggyel rendelkezni" és „hárommal oszthatónak lenni" tulajdonságokat tetszés szerinti P, U és H tulajdonsággal helyettesítve, a papírra írt számokat pedig tetszés szerinti olyan elemekkel, amelyek rendelkezhetnek ezekkel a tulajdonságokkal – igaz marad, hogy elhagyva az elemek közül a P és U tulajdonságokkal rendelkezőket, továbbá azokat, amelyeknek megvan a P tulajdonságuk, de H nincs meg, végül azokat is, amelyeknek megvan a H tulajdonságuk, de U nincs meg –, csupa a P tulajdonsággal nem rendelkező elem marad vissza. Az olvasóra bízzuk a fönti megoldás átírását a most megfogalmazott állítás esetére.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy k-jegyű szám négyzete ugyanazzal a k jeggyel kezdődik, akkor ez a szám tíznek hatványa.*

I. megoldás. Legyen N olyan k-jegyű egész szám, melynek négyzetében az első k jegy rendre megegyezik N jegyeivel. Ekkor az $N^2 : N$ osztás N-et, tehát egy k-jegyű számot ad hányadosul. Másrészt a szokásos módon végezve az osztást az első részletosztandó, N^2 első k jegye éppen N; ebben az osztó megvan 1-szer, az első részletmaradék pedig 0. A hányados első jegye tehát 1, és az N^2 osztandó további jegyeit egyenként sorra „levéve" a hányados további jegyei gyanánt mindaddig 0-t kapunk, amíg a részletosztandók k-nál kevesebb jegyűek, tehát $k-1$ egymás utáni lépésben. Így a hányados kezdő 1-ese után $k-1$ db 0 jegy következik. Ezzel viszont megkaptuk az N hányadosnak mind a k jegyét, tehát N valóban 10-nek hatványa: 10^{k-1}, ennélfogva $N^2 = 10^{2k-2}$, vagyis az osztás összes lépéseiben 0 a maradék.

II. megoldás. Legyen ismét N a kérdéses alapszám, és tegyük fel, hogy N^2-ben az N jegyeivel rendre megegyező első k számjegy után még t darab számjegy szerepel. Mindezeket zérussal helyettesítve (ha nem eredetileg azok), N-nek 10^t-szeresét kapjuk, és N^2 nagyobb a kapott számnál, vagy éppen egyenlő vele:

$$N^2 \geq N \cdot 10^t.$$

Ezt (a pozitív) N-nel osztva

$$N \geq 10^t. \tag{1}$$

Írjunk másrészt N^2 összes további jegyei helyére 9-eseket. A kapott szám $N \cdot 10^t$-nél a t jegyből álló $999\ldots 9 = 10^t - 1$ számmal nagyobb, másrészt N^2 kisebb ennél a számnál, vagy éppen egyenlő vele:

$$N^2 \leq N \cdot 10^t + 10^t - 1 = (N+1)10^t - 1.$$

A jobb oldal 1-gyel kisebb $N+1$-nek 10^t szeresénél, a bal pedig 1-gyel nagyobb az $(N+1)(N-1) = N^2 - 1$ számnál, így

$$N^2 - 1 < (N+1)10^t.$$

Ezt (a pozitív) $N+1$-gyel osztva

$$N - 1 < 10^t, \qquad N < 10^t + 1.$$

Eredményünket (1)-gyel egybevetve $N = 10^t$, hiszen N egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. Mivel N k-jegyű, azért $t = k-1$.

Megjegyzések. 1. Megoldásainkban feltettük, hogy egész számról van szó. Valóban csak ezeknél szoktunk a számjegyek számáról beszélni. Tizedes jegyek után tetszés szerinti számú 0-t írhatunk, s így a számjegyek száma határozatlan. Ha N és N^2 tizedes jegyeket is tartalmaznak, 10 alkalmas hatványával szorozva visszavezethetjük a kérdést egész számokra.

2. A feladat állítása 2-nél nagyobb hatványkitevő esetén nem igaz. Pl. $32^3 = 32\,768$, a számjegyek sorozata szintén 32-vel kezdődik, vagy $46\,416^4 = 4\,641\,633\,499\,322\,843\,136$, $18^5 = 1\,889\,568$, $16^6 = 16\,777\,216$; $17\,783^5$ kezdő számjegyei ugyancsak 1, 7, 7, 8, 3. Az I. megoldás gondolatmenete rámutat ennek lehetőségére. Pl. $N^3 : N = N^2$ jegyeinek száma több, mint k, tehát a hányadosban a $k+1$-edik helytől kezdve már felléphet 0-tól különböző számjegy.

Fried Ervin