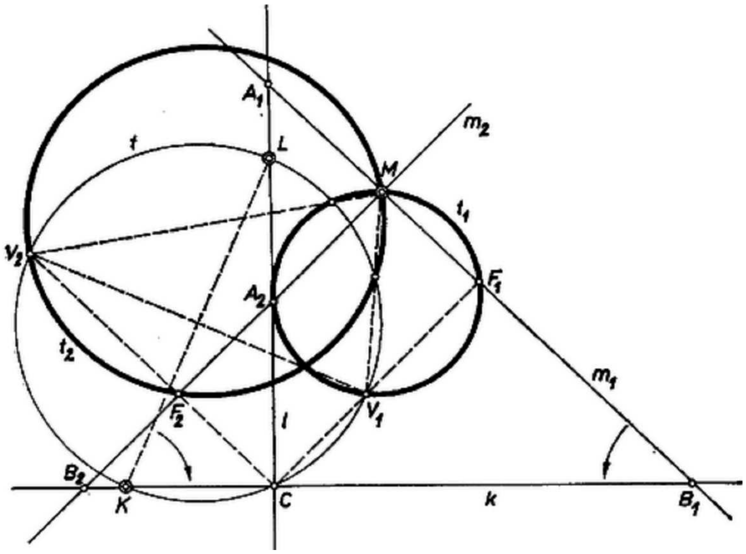
1. feladat. *Adva van a síkban három különböző pont, K, L és M. Tekintsük mindazokat az egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, melyeknek oldalegyenesei rendre átmennek az adott pontokon úgy, hogy az átfogó oldalegyenese az M ponton menjen át. Mi a mértani helye e háromszögek köré írható körök középpontjainak?*



Megoldás. A keresett mértani hely egy pontját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Húzunk egy tetszőleges k egyenest a K ponton át, majd L-en át egy erre merőleges l egyenest, metszéspontjuk legyen C. Ezután az M ponton keresztül meghúzzuk a k-val 45°-os szöget bezáró m_1, m_2 egyeneseket. Az ábrán m_1 az óramutató járásával ellenkező irányban 45°-kal elforgatva jut k-ra, m_2 pedig megegyező irányú 45°-os forgatással. Messe k-t és l-et m_1 a B_1, ill. A_1 pontban, m_2 pedig B_2-ben, ill. A_2-ben. Ekkor A_1B_1C és A_2B_2C a feladat követelményeinek megfelelő egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, ábránkon A_1B_1 felezőpontja F_1, A_2B_2 felezőpontja F_2, mindkettő hozzátartozik a keresett mértani helyhez.

Azt keressük, milyen alakzatot ír le F_1 és F_2, míg k a K körül – s így l az L körül, m_1 és m_2 pedig az M körül – egyszer körülfordul.

Az átfogók felezőpontjait A_1 és B_1, ill. A_2 és B_2 kijelölése nélkül is megkaphatjuk, ugyanis C a KL szakasz fölé írt t Thalesz–körön van, CF_i pedig ($i = 1, 2$) – egyenlő szárú háromszögről lévén szó – felezi az A_iCB_i szöget és merőleges m_i-re, tehát F_i-t M merőleges vetülete adja a k, l egyenespár megfelelő f_i szögfelezőjén. E szögfelezők minden helyzetben felezik t-nek a szárak közé eső KL félkörívét is, és így átmennek t-nek a KL-re merőleges V_1V_2 átmérője valamelyik végpontján (az ábrán CF_1 átmegy V_1-en, CF_2 pedig V_2-n. Ezért – bármilyen is a C, F_i, V_i pontok sorrendje –, mindig fennáll: $MF_1C\sphericalangle = MF_1V_1\sphericalangle = 90°$ és $MF_2C\sphericalangle = MF_2V_2\sphericalangle = 90°$. Így a k különböző helyzeteihez tartozó F_1 pontok a V_1M, mint átmérő fölé rajzolt t_1 Thalesz–körön vannak, az F_2 pontok pedig a V_2M átmérő fölé rajzolt t_2 Thalesz–körön.

Hátra van még annak megvizsgálása, hogy a két utóbbi Thalesz–kör minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Legyen a t_1 kör egy M-től és V_1-től különböző pontja X_1, és kössük össze X_1-et V_1-gyel és M-mel. Ekkor $MX_1V_1\sphericalangle = 90°$; továbbá, miután V_1 rajta van a t körön, az X_1V_1 egyenes e kört általában még egy C pontban metszi. Így a CK, CL és X_1M egyenesek egy derékszögű egyenlő szárú háromszöget alkotnak, és e háromszög köré írt kör középpontja éppen a felvett X_1 pont. Ugyanis a CX_1 és CK egyenesek kisebbik szöge 45°, mert az egyenesek között t-nek valamelyik V_1K íve fekszik, vagyis a kör negyede vagy háromnegyede, így a CK-ra merőlegesen álló CL egyszersmind tükrös párja is CK-nak CX_1-re, továbbá X_1M önmagának tükörképe CX_1-re, hiszen merőleges rá; végül X_1 az így nyert háromszög átfogójának és szimmetriatengelyének közös pontja. – X_1 gyanánt V_1 is vehető, ekkor X_1V_1 egyenes gyanánt az $X_1M = V_1M$ átmérőre emelt merőleges, t_1-nek V_1-beli érintője veendő, hasonlóan $X_1 = M$ esetén az M-beli érintőt vesszük X_1M gyanánt. – Hasonlóan előfordulhat, hogy X_1V_1 a t kört másodszor éppen K-ban, vagy L-ben metszi, ekkor az egyik befogó egyenese a KL egyenes, a másiké pedig a talált metszéspontban t-hez húzott érintő. C gyanánt adódhat maga V_1 is, ha ti. X_1V_1 éppen érinti a t kört.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a t_1 kör minden pontja a mértani helyhez tartozik. Hasonlóképpen az F_2 pontok t_2 körének minden pontja ugyancsak hozzátartozik a mértani helyhez, mert meggondolásaink V_1 helyén V_2-vel változatlanul érvényesek. A keresett mértani hely tehát a t_1 és t_2 körökből áll.

Megjegyzés. Lehetséges, hogy az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög ponttá zsugorodik össze, éspedig akkor és csak akkor, ha C azonosnak adódik X_1-gyel, hiszen a szóban forgó körülírt kör sugara X_1C. Ilyen X_1 mindig van: t és t_1-nek V_1-től különböző közös pontja, ill. ha t és t_1 érintkeznek, akkor maga V_1.

2. feladat. *Egy tört számlálója és nevezője egyaránt kétjegyű egész szám, és a számláló tízeseinek a száma egyenlő a nevező egyeseinek számával. Elhagyva a közös jegyet, a megmaradt egyjegyű számok hányadosa egyenlő az eredeti tört értékével. Melyik ez a tört?*

Megoldás. A feladat olyan a, b, c számjegyek keresését kívánja, amelyekre

$$\frac{10\,a+b}{10\,c+a}=\frac{b}{c}.$$

Itt a és c nem 0, mert a bal oldal kétjegyű számok hányadosa, de b sem lehet 0, mert akkor a jobb oldal 0, tehát $a=0$ kellene hogy legyen. A törteket eltávolítva

$$10\,ac+bc=10\,bc+ab,$$

amit, a 10-zel szorzott tagokat egy oldalra rendezve, így írhatunk:

$$10(a-b)c=(a-c)b. \tag{1}$$

Itt, ha $a-b$ nem 0, akkor vagy $a-c$ egyenlő 5-tel, vagy -5-tel, vagy $b=5$, mert mindkét tényező abszolút értéke kisebb 10-nél.

1) Ha $a-b=0$, akkor $a-c=0$, vagyis $a=b=c$, és ez nyilván minden pozitív a számjegyre megoldása a feladatnak.

2) Ha $a-c=-5$, $a=c-5$, akkor (1)-ből (-5-tel egyszerűsítve)

$$2(b+5-c)c=b.$$

Ha $c\le 5$, akkor a bal oldal nagyobb, mint b, ha pedig $c>5$, akkor a bal oldal 10-nél nagyobb, tehát nem lehet egy számjeggyel egyenlő.

3) Ha $a-c=5$, $a=c+5$, akkor (1)-ből

$$2(c+5-b)c=b,\quad (2c+1)b=2c(c+5).$$

Innen

$$b=c+5-\frac{c+5}{2c+1}=c+5-\frac{2c+1+9}{2(2c+1)}=c+\frac{9}{2}-\frac{9}{2(2c+1)}.$$

Ez csak úgy adhat egész számot, ha $2c+1$ osztója a 9-nek. Ez $c=1$, 4 esetekben következik be. Ekkor b értéke 4, ill. 8, $a=c+5$ értéke pedig 6, ill. 9. Az ezekkel felírt törtek

$$\frac{64}{16}=\frac{4}{1},\quad \frac{98}{49}=\frac{8}{4}$$

valóban megfelelnek a feladat követelményeinek.

4) Végül, ha $b=5$, (1)-ből

$$2(a-5)c=a-c,\quad (2c-1)a=9c.$$

Ebből

$$a=\frac{9c}{2c-1}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2(2c-1)}.$$

Ez akkor pozitív egész, ha $2c-1$ a 9 pozitív osztója, tehát $c=1$, 2, 5. Az a-ra adódó értékek 9, 6, 5. Ezek közül a harmadik értékhármas az 1) alatt szerepelt megoldások egyikét adja, a másik kettőhöz tartozó törtekre

$$\frac{95}{19}=\frac{5}{1},\quad \frac{65}{26}=\frac{5}{2},$$

tehát ezek is megfelelnek a feladat követelményeinek; így 9 érdektelen megoldás mellett további 4 megoldása van a feladatnak.

Megjegyzések. Több versenyző a követelmény alapján kifejezte valamelyik számjegyet a másik kettővel, majd az utóbbiak minden lehetséges értékpárja mellett azt vizsgálta, lehet-e számjegy a kifejezés értéke. Látjuk, hogy a feladat kevesebb próbával is megoldható. Számosan egy megfelelő számjegyhármas megtalálása után abbahagyták a próbálgatást.

3. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$x^2-xy+y^2=2, \tag{1}$$

$$x^3-y^3=4. \tag{2}$$

Megoldás. Alkalmas új ismeretlenek bevezetése útján feladatunkat egyszerűbb egyenletekből álló egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza. Legyen pl.

$$x-y=u,\quad \text{és}\quad xy=v,$$

akkor egyenleteink így alakulnak át:

$$x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy = u^2 + v = 2, \tag{1a}$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) = u^3 + 3uv = 4. \tag{2a}$$

Az első egyenletből v kifejezését a másodikba helyettesítve:

$$u^3 + 3u(2-u^2) = 4.$$

Rendezés és egyszerűsítés után a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$u^3 - 3u + 2 = 0,$$
$$(u^3 - u) - 2(u-1) = (u-1)\big[u(u+1) - 2\big] = (u-1)(u^2+u-2).$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát vagy $u-1=0$, $u_1=1$, vagy $u^2+u-2=0$. Az utóbbi egyenlet két gyöke $u_2=1$ és $u_3=-2$. Az u-hoz tartozó v-ket az (1a) egyenletből számíthatjuk ki,

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = -2.$$

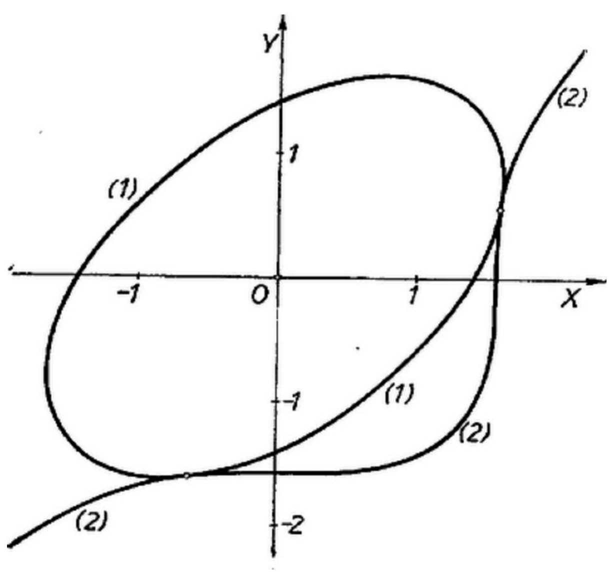
Az $u_1=1$, $v_1=1$ gyökrendszerhez tartozó x és y értékeket az

$$u = x - y = 1, \quad v = xy = 1$$

egyenletekből kiszámítva

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$
$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Az u_2, v_2 gyökpárból nem kapunk új megoldást. Az $u_3=-2$, $v_3=-2$ gyökpárral adódó $x-y=-2$, $xy=-2$ egyenletrendszernek nincs valós megoldása.



Megjegyzés. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy (1) képe a derékszögű koordinátarendszerben olyan ellipszis, amelynek középpontja az origó, szimmetria tengelyei a koordináta–tengelyekkel 45°-os szöget zárnak be, nagy tengelye az I. és III. síknegyedekben halad, (2) képe pedig egy ún. harmadrendű görbe. A mindkét egyenletet kielégítő x, y számpárokhoz tartozó pontok a görbéknek közös pontjai, ez esetben érintkezési pontok, bennük a két görbének közös az érintője is.