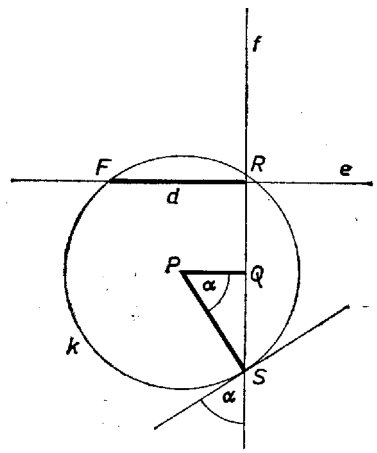
I. megoldás. Jelöljük az adott egyenest f-fel, az adott pontot F-fel, az adott hegyesszöget α-val, F és f távolságát d-vel. Legyen k a F-en átmenő tetszőleges kör, messe f-et az R, S pontokban, jelöljük k középpontját P-vel és P vetülete f-en legyen Q (1. ábra).



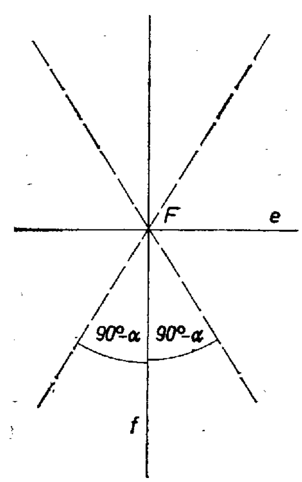
1. ábra

A PQS háromszög derékszögű, és P-nél levő szöge egyenlő k és f szögével, P tehát akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha ez a szög egyenlő α-val. A PQS háromszögben

$$\frac{PQ}{PS} = \cos\alpha,$$

továbbá, $PS = PF$, így P akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha az f-től mért távolsága a F-től mért távolságának $\lambda = \cos\alpha$-szorosa. A továbbiakban az ilyen tulajdonságú pontok mértani helyét fogjuk meghatározni.

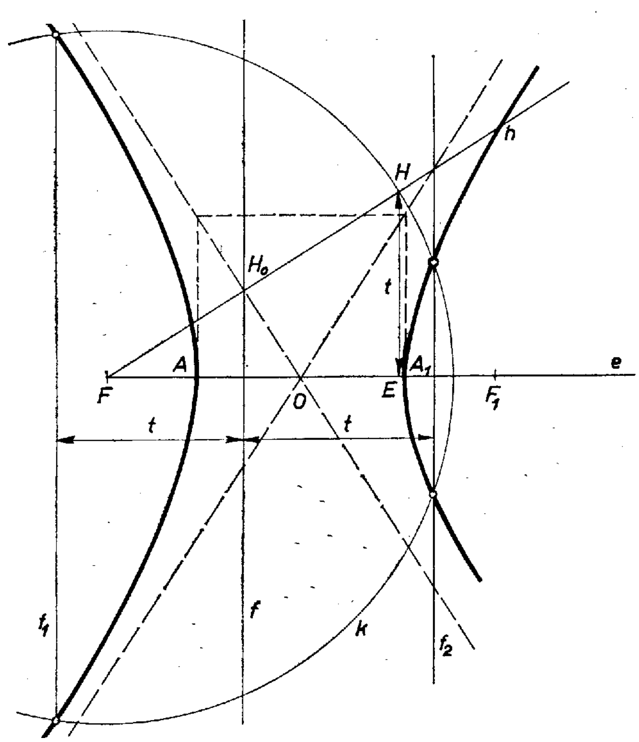
Ha F rajta van f-en, akkor azonos R és S egyikével, P tehát rajta van a F-en átmenő, f-fel $(90^\circ - \alpha)$ nagyságú szöget bezáró két egyenes egyikén (2. ábra).



2. ábra

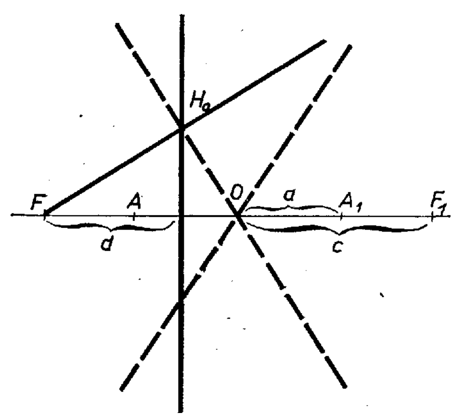
A fentiekből következik, hogy ezeknek az egyeneseknek minden, a F-től különböző pontja a mértani helyhez tartozik, és ebben az esetben ez a két egyenes adja a vizsgált mértani helyet (metszéspontjukat kivéve). A továbbiakban feltesszük, hogy F nincs rajta f-en, azaz $d > 0$.

Tájékozódásul megszerkesztjük a mértani helynek néhány pontját. F-en át f-re merőleges e félegyenest rajzolunk, majd ugyancsak F-en át e-vel $(90^\circ - \alpha)$ szöget bezáró h félegyenest. Egy, a F körül rajzolt tetszőleges k kör messe h-t H-ban, H vetülete e-n legyen E. Megrajzoljuk az f-től EH távolságra levő, f-fel párhuzamos f_1, f_2 egyeneseket: ezeknek k-val alkotott metszéspontjai a kívánt tulajdonságúak (3. ábra).



3. ábra

A kapott pontok alapján azt sejtjük, hogy a vizsgált mértani hely hiperbola, melynek F az egyik fókusza, és e a valós tengelye. Hogy ezt bizonyítani tudjuk, meghatározzuk először a sejtett hiperbolának a valós tengelyén levő pontjait és a másik fókuszát. Jelöljük ezeket A-val, A_1-gyel, F_1-gyel és a hiperbola centrumát O-val, legyen továbbá $OA = a$, $OF = c$ (4. ábra).



4. ábra

Ekkor $AF = c - a$; $A_1F = c + a$; A és f távolsága $d + a - c$; A_1 és f távolsága $a + c - d$. Mivel A és A_1 a mértani helyhez tartozik:

$$\lambda(c-a) = d + a - c,$$
$$\lambda(c+a) = -d + a + c.$$

E kettő összegéből kapjuk, hogy $a = \lambda c$, ezt az elsőbe helyettesítve

$$c = \frac{d}{1-\lambda^2} = \frac{d}{\sin^2\alpha}, \qquad a = \frac{d\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

adódik.

Sejtésünk igazolásához ezek szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha egy tetszőleges P pont f-től mért távolsága a F-től mért távolságának a λ-szorosa, akkor $|PF - PF_1| = 2a$. Legyen $PF = r$; $PF_1 = R$; a PFF_1 háromszög F-nél levő szöge φ, ebben a háromszögben a cosinustétel alapján

(1) $$R^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\varphi.$$

Legyen P vetülete f-en Q, a FF_1 egyenesen T, akkor $FT = |r\cos\varphi|$. Ha $PQ = \lambda r$. Ha P és F az f ellentétes oldalán van, akkor φ hegyesszög és

$$FT = d + PQ,$$
$$r\cos\varphi = d + \lambda r,$$

ha pedig P és F az f azonos oldalán van, akkor

$$r\cos\varphi = d - \lambda r,$$

hiszen $\varphi < 90^\circ$ mellett $FT = d - PQ$, $\varphi > 90^\circ$ mellett $FT = PQ - d$. Legyen ε értéke az első esetben (-1), a másodikban $(+1)$, ekkor

$$r\cos\varphi = d - \varepsilon\lambda r. \tag{2}$$

Ennek alapján

$$c^2 - cr\cos\varphi = c(c - d + \varepsilon\lambda r) = c\left(\frac{d}{1-\lambda^2} - d - \varepsilon\lambda r\right) =$$
$$= c\left(\frac{d\lambda^2}{1-\lambda^2} + \varepsilon\lambda r\right) = c\lambda\left(\frac{d\lambda}{1-\lambda^2} + \varepsilon r\right) = a(a + \varepsilon r),$$

amit (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$R^2 = r^2 + 4\varepsilon ra + 4a^2 = (r + 2\varepsilon a)^2.$$

Ebből $\varepsilon = 1$ mellett $R = r + 2a$ következik, $\varepsilon = -1$ mellett közvetlenül csak annyit mondhatunk, hogy

$$R = |r - 2a|.$$

Azonban $R + r > 2c > 2a$, tehát $R > 2a - r$, így csak $R = r - 2a$ lehet.

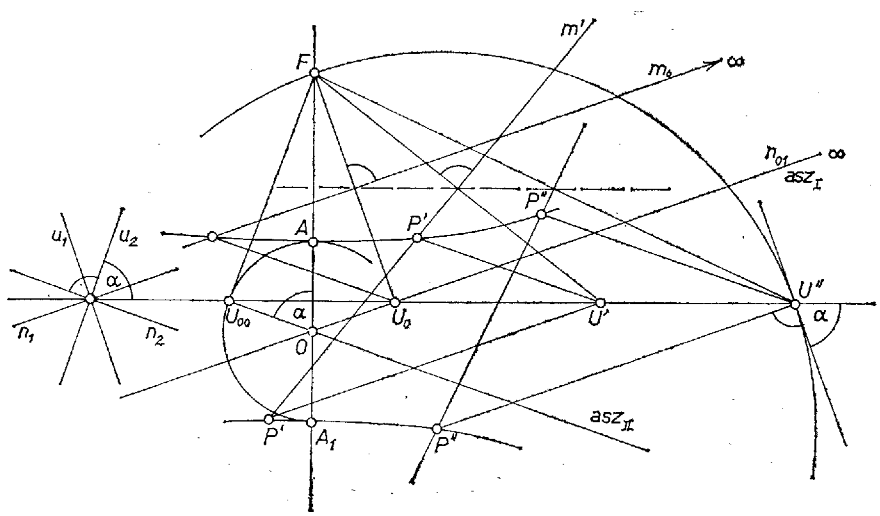
Ezzel beláttuk, hogy a vizsgált mértani hely pontjai rajta vannak a F, F_1 fókuszú, A, A_1 csúcsú hiperbolán. Fordítva, ennek a hiperbolának minden pontja a mértani helyhez tartozik, hiszen ha $R = r + 2\varepsilon\ a$, akkor a fenti átalakítással kapjuk, hogy (2) teljesül, amiből $PQ = \lambda r$ következik.

A kapott hiperbola képzetes tengelye

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{d}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{d}{\sin\alpha} = a\ \mathrm{tg}\ \alpha,$$

az aszimptoták tehát α szöget zárnak be a valós tengellyel. Így az egyik aszimptotát megkapjuk, ha a tájékozódásban használt h egyenes f-fel való H_0 metszéspontjában merőlegest emelünk h-ra, a képzetes tengely pedig az FH_0 szakasz lesz.

Megjegyzés. A mértani hely egyes pontjait a következő eljárással is kaphatjuk. Válasszuk ki f-nek tetszés szerinti U pontját az előírt körrel való (egyik) metszéspont céljára, ekkor az U-n átmenő, f-fel α szöget bezáró két egyenes, u_1, u_2 lesz egy-egy megfelelő kör U-beli érintője – amely az egyenes és kör metszésénél levő szög értelmezése szerint a kört a szög másik száraként képviseli. Továbbmenve a kör középpontja egyrészt az u_1-re, ill. u_2-re U-ban állított n_1, n_2 merőlegesen lesz, másrészt az FU húr m felező merőlegesén (5. ábra).



5. ábra

Ebből az is adódik, hogy U minden helyzetében FU felező merőlegesén két pontja van a mértani helynek, kivéve ha az FU_0, FU_{00} egyenes $90^\circ - \alpha$ szöggel hajlik f-hez (vagyis párhuzamos pl. u_1-gyel), ekkor egy pont van rajta. A felező merőlegesnek ez a két helyzete párhuzamos a hiperbola egy-egy aszimptotájával, a megfelelő n_0, n_{00} egyenes pedig maga a két aszimptota, és metszéspontjuk a hiperbola középpontja. Ekkor ugyanis

$$FU_0 = \frac{d}{\sin\alpha} \qquad \text{és} \qquad FO = \frac{FU_0}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin^2\alpha},$$

ami a fentiek szerint a c excentricitás. – Így a hiperbola minden pontját két különböző U-ból kapjuk meg.

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldás jelöléseit, és azt az eredményt, hogy azoknak a P pontoknak a mértani helyét kell meghatároznunk, amelyeknek az f egyenestől mért $t = PQ$ távolsága egyenlő a F ponttól mért $r = PF$ távolságuk λ-szorosával, ahol $\lambda = \cos\alpha$, azaz amelyekre

$$t = \lambda\, r = r\ \cos\ \alpha.$$

Válasszuk meg úgy a koordináta-rendszert, hogy az x tengely pozitív iránya megegyezzék a F-ből induló, f-re merőleges e félegyenes irányával, az y tengely pedig f legyen. Ezek szerint F koordinátái: $F(-d;\ 0)$. Egy tetszőleges $P(x,\ y)$ pontra

$$t = |x|, \qquad r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2},$$

P tehát akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha koordinátáira

$$|x| = \lambda\sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

teljesül. Mivel mindkét oldalon pozitív szám áll, egyenletünk ekvivalens az

$$x^2 = \lambda^2\left\{(x+d)^2 + y^2\right\} \tag{3}$$

egyenlettel, amelyből rendezve és tejes négyzetté kiegészítve, a $d > 0$ feltétel mellett az

$$\frac{(1-\lambda^2)^2\left(x - \dfrac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2}\right)^2}{\lambda^2 d^2} - \frac{y^2(1-\lambda^2)^2}{d^2} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez hiperbola egyenlete, centrumának koordinátái

$$x_0 = \frac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2} = \frac{d\ \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}; \qquad y_0 = 0,$$

valós tengelye az x tengely, és paraméterei a szokásos jelöléssel

$$a = \frac{\lambda d}{1-\lambda^2} = \frac{d\ \cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \qquad b = \frac{d}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{d}{\sin\alpha},$$
$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{d}{1-\lambda^2} = \frac{d}{\sin^2\alpha} = d + x_0,$$

tehát egyik fókusza a F pont. Mivel $\dfrac{a}{b} = \mathrm{tg}\ \alpha$, eredményünkből az is leolvasható, hogy az aszimptoták a valós tengellyel α nagyságú szöget zárnak be, és könnyen látható az I. megoldásnak az az eredménye is, hogy a F pontnak az aszimptotákra eső merőleges vetülete rajta van f-en.

Ha $d = 0$, akkor (3)-ból az

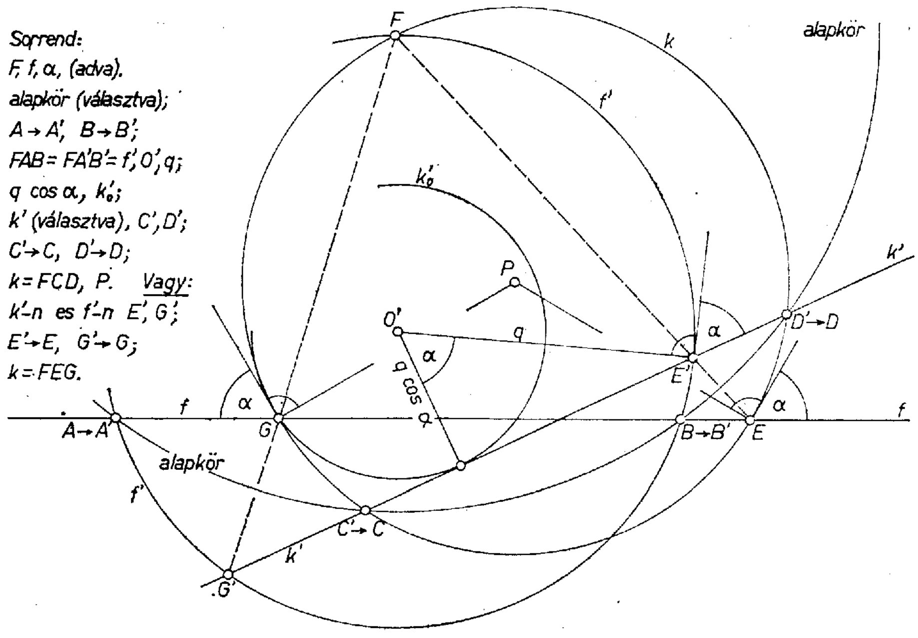
$$(1-\lambda^2)x^2 = \lambda^2 y^2,$$
$$\sqrt{1-\lambda^2}\cdot|x| = \lambda\cdot|y|$$

egyenletet kapjuk: ez két egyenes egyenlete, melyek átmennek az origón, a tengelyre tükrözve egymásba mennek át, és iránytangensük abszolút értéke

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2} = \mathrm{tg}\ \alpha,$$

tehát az x tengellyel bezárt szögük α.

III. megoldás. Ismét az I. megoldásbeli jelöléseket használjuk és feltesszük, hogy $d > 0$ (a $d = 0$ esetben a 2. ábra mutatja a megoldást). Vegyünk fel tetszőlegesen egy k kört, mely eleget tesz a feladat követelményeinek, és invertáljuk a F pont körüli tetszőleges körre, inverzét jelöljük k'-vel, f inverze pedig az f'-vel jelölt, q sugarú kör legyen (6. ábra).



6. ábra

Ekkor k' is α szög alatt metszi f'-t. Az ilyen tulajdonságú k' egyenesek azonban érintik az f'-vel koncentrikus, $q\cos\alpha$ sugarú k_0' kört. Legyen k_0' inverze k_0, akkor a k kör – bárhogyan is vettük fel – érinteni fogja k_0-t. Másrészt, ha egy F-en áthaladó k kör érinti k_0-t, akkor inverze érinti k_0', azaz α szög alatt metszi f'-t, és így k is α szög alatt metszi f-et.

Keressük tehát azon körök középpontjainak mértani helyét, melyek F-en átmennek, és k_0 érintik. Jelöljük k_0 középpontját F_1-gyel, sugara legyen $2a$, akkor a mértani hely minden P pontjára

$$|PF - PF_1| = 2a,$$

a mértani hely tehát hiperbola, melynek két fókusza F és F_1, valós tengelyének hossza $2a$.